



Estimación robusta de la matriz de covarianza, para la selección óptima de portafolios de inversión

Daniela Gutiérrez Sepúlveda

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Minas, Departamento Ingeniería de la Organización
Medellín, Colombia
2018

Estimación robusta de la matriz de covarianza, para la selección óptima de portafolios de inversión

Daniela Gutiérrez Sepúlveda

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Ingeniería Administrativa

Director:

PhD Santiago Medina Hurtado

Codirector:

PhD. Henry Laniado Rodas

Línea de Investigación:

Estadística robusta en la selección de portafolios

Grupo de Investigación:

Ingeniería financiera y gestión empresarial-GIFIG

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas, Departamento Ingeniería de la Organización

Medellín, Colombia

2018

Dedico este trabajo con todo mi amor y cariño a Dios , a mis hijas María de los Ángeles y Sara Sofía, a mis padres Luis Alberto y Nancy y a mi esposo Martin Darío, quienes han sido un motor de motivación y apoyo incondicional constante en mi proceso de formación académica.

Nunca aplaces lo verdaderamente esencial.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios, por permitirme terminar esta tesis, agradezco a mi director de tesis el profesor Santiago Medina Hurtado y a mi codirector el profesor Henry Laniado Rodas por el constante apoyo y orientación que me brindaron en mi proceso de formación.

Presento un agradecimiento muy especial a mis amados padres, quienes me han forjado como la persona que soy en la actualidad y sin ellos este logro hubiese sido imposible, también a mi amando esposo por su apoyo y amor incondicional para la culminación de este trabajo de investigación, y quien ha representado una gran motivación continua para forjarme como una mejor persona y profesional.

Resumen

Los portafolios de inversión se encuentran constantemente expuestos a riesgos sistemáticos y no sistemáticos, generando rentabilidades variantes y sensibles a valores atípicos, es por ello que con la estimación robusta del riesgo, se busca minimizar el impacto de inestabilidad que generan los datos atípicos en portafolios de gran dimensión. Se propone un método robusto de estimación de la matriz de covarianza basado en la teoría de encogimiento de la misma y en la teoría del recorte de la media de los rendimientos de las acciones que conforman el portafolio, por otro lado, se estudia la implementación de los métodos de estimación robusta de la matriz de covarianza: recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis y Determinante Mínimo de la Matriz de Covarianza (MCD) en la selección de portafolios de gran dimensión y bajo la metodología de rolling horizon. Adicionalmente, se compara el desempeño financiero de los tres métodos diferentes de estimación de la matriz de covarianza, en términos del ratio de sharpe, del índice de turnover y varianza de los portafolios. También se presenta el análisis de sensibilidad del método robusto propuesto y se compara con el análisis de sensibilidad relacionado con las diferentes estimación clásica de la matriz de covarianza. Se muestra la notoria estabilidad de la varianza de los rendimientos de las acciones ante la presencia de datos atípicos, cuando se utiliza el método de estimación de la matriz de covarianza propuesto.

Palabras clave: matriz de covarianza robusta, media recortada, encogimiento de la covarianza, rolling horizon, determinante mínimo de la matriz de covarianza – MCD, distancia de Mahalanobis.

Abstract

Investment portfolios are constantly exposed to systematic and non-systematic risks, generating variable returns that are sensitive to atypical values. For this reason, with the robust estimation of risk, the aim is to minimize the impact of instability generated by atypical data in portfolios of great dimension. We propose a robust method of estimating the covariance matrix based on the theory of shrinkage of the same and the theory of the cut of the average of the yields of the actions that make up the portfolio, on the other hand, we study the implementation of the methods of robust estimation of the covariance matrix: chi-square cut in the distance of Mahalanobis and Minimum Determinant of the covariance matrix (DCM) in the selection of large portfolios and under the rolling horizon methodology. Additionally, we compare the financial performance of the three different methods of estimating the covariance matrix, in terms of the sharpe ratio, the turnover index and variance of the portfolios. The sensitivity analysis of the proposed robust method is also presented and compared with the sensitivity analysis related to the classical estimation of the covariance matrix. The notorious stability of the variance of the yields of the actions is shown in the presence of atypical data, when the estimation method of the proposed covariance matrix is used.

Keywords: robust covariance matrix, trimmean, matrix covariance shrinkage, rolling horizon, minimum covariance determinat-MCD, Mahalanobis distance.

Contenido

Pág.

Resumen	IX
Abstract.....	X
Lista de figuras.....	12
Lista de tablas	13
Lista de Símbolos y abreviaturas.....	15
Introducción	17
1. Estado del arte	21
1.1 Estadística robusta	26
1.2 Estimación robusta de la matriz de covarianza	27
1.2.1 Estimador M.....	32
1.2.2 Estimador S	34
1.2.3 Determinante mínimo de la matriz de covarianza (MCD).....	35
1.2.4 Encogimiento de la matriz de covarianza	37
1.2.5 Desviación media absoluta (MAD) y Comedian (COM)	28
1.2.6 Análisis de componentes principales robusto.....	29
1.2.7 Estimador distancia de Mahalanobis robusto	31
1.2.8 Estimador de Sthangel- Donoho (D-S).....	38
1.2.9 Mediana muestral	39
1.2.10 Recorte de la media.....	40
2. Propuesta metodológica	41
2.1 Descripción de los datos.....	41
2.2 Descripción del estudio de referencia.....	43
2.2.1 Rolling horizon o ventana móvil.....	47
2.2.2 Ratio de sharpe	49
2.2.3 Índice de Turnover	50
2.2.4 Varianza de los portafolios	51
2.2.5 Implementación de los métodos de estimación de la matriz de covarianza	51
2.3 Análisis de sensibilidad.....	53
3. Método propuesto: encogimiento de la matriz de covarianza con recorte de la media	
3.1 Estimación de la matriz de covarianza muestral con media recortada.....	57

3.2	Estimación del objetivo óptimo de contracción de la matriz de covarianza (Target matrix)	59
3.3	Estimación de la constante óptima de contracción.....	60
4.	Resultados.....	61
4.1	Análisis del desempeño financiero de los portafolios de inversión.....	61
4.1.1	Análisis del ratio de Sharpe de los portafolios.....	61
4.1.2	Análisis del índice de Turnover de los portafolios	66
4.1.3	Análisis de la varianza de los portafolios.....	67
4.2	Análisis de sensibilidad.....	70
4.2.1	Variación del parámetro D: cantidad de datos contaminados	71
4.2.2	Variación del parámetro B: desviación típica	73
4.2.3	Variación del parámetro α : percentil de recorte.....	74
4.2.4	Variación del parámetro C: constante	76
5.	Conclusiones y recomendaciones.....	77
5.1	Conclusiones	77
5.2	Recomendaciones.....	78
	Bibliografía	79

Lista de figuras

Pág.

Figura 1	Metodología empleada para la implementación del método propuesto	57
Figura 2	Comportamiento del ratio de sharpe de los portafolios de inversión según percentil de recorte	63
Figura 4	Análisis de sensibilidad para diferentes valores del parámetro D	72
Figura 5	Análisis de sensibilidad para diferentes valores del parámetro B con $q=10$	74
Figura 6	Análisis de sensibilidad para diferentes valores de q	75
Figura 7	Análisis de sensibilidad para diferentes valores de C	76

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1 Conjunto de datos	42
Tabla 2 Lista de portafolios considerados	44
Tabla 3 Ratios de sharpe de los portafolios.....	45
Tabla 4 Índices de Turnover de estabilidad de los portafolios	46
Tabla 5 Varianza de los portafolios.....	46
Tabla 6 Mayor valor de sharpe (H1 y H2) y el α^* según la dimensión del portafolio	64
Tabla 7 Ratios de sharpe de los portafolios.....	64
Tabla 8 Índices de turnover de los portafolios según dimensión del portafolio	66
Tabla 9 Varianza de los portafolios según la dimensión del portafolio	68

Lista de Símbolos y abreviaturas.

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término
N	Número de activos que conforman el portafolio
\vec{r}	Vector con los componentes r_i
r_i	Rendimiento esperado de cada activo i
$\hat{\Sigma}$	Estimador de la matriz de covarianza
$\hat{\mu}$	Estimación de la media muestral
S_r^*	Estimación de la matriz de covarianza robusta muestral con recorte a la media
\hat{S}_r'	Estimación robusta del encogimiento de matriz de covarianza con recorte a la media
\hat{S}_{MCD}	Estimación de la matriz de covarianza mediante el método MCD
\hat{S}_{χ^2}	Estimación de la matriz de covarianza mediante el recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis
α^*	Percentil de recorte a la media óptimo
m	Estimador m del retorno M de la cartera
d_i	Distancia de Mahalanobis
p	Número de activos que conforman un portafolio
λ^*	Constante de contracción
F	Target matrix o matriz objetivo de contracción
$T(\alpha)$	Media recortada al percentil α
α	Percentil

Símbolo	Término
N	Número de activos que conforman el portafolio
\vec{r}	Vector con los componentes r_i
r_i	Rendimiento esperado de cada activo i
$\hat{\Sigma}$	Matriz de varianza-covarianza
\hat{S}	Estimación de la varianza muestral
\vec{X}	Estimación de la media muestral

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término
ν	Grados de libertad de la distribución chi-cuadrado
γ	Grado de aversión al riesgo del inversionista
ρ	Función de pérdida simétrica

Superíndices

Superíndice	Término
T	Denota la matriz transpuesta

Abreviaturas

Abreviatura	Término
MCD	Determinante mínimo de la matriz de covarianza
M-V	Modelo de media varianza
MAD	Desviación absoluta respecto a la mediana
COM	Covarianza robusta entre dos variables
ACP	Análisis de componentes principales
ARCP	Análisis robusto de componentes principales

Introducción

La selección de portafolios consiste en distribuir el capital de inversión entre un conjunto activos, la forma de distribuir este capital ha sido un tema de gran interés entre los gestores de las carteras. La teoría clásica de selección de portafolios data desde el año 1952, cuando Harry Markowitz presentó un estudio en el que propuso un modelo de optimización de portafolios no lineal conocido como el modelo de Media Varianza (M-V) que consiste en asignar capital sobre una cantidad de activos disponibles para maximizar el retorno de la inversión mientras se minimiza el riesgo asociado con la inversión, generando de esta forma carteras que no pueden ser mejoradas en términos de rentabilidad y riesgo, y son llamadas eficientes.

El modelo clásico de M-V requiere de la estimación de los parámetros, como su nombre lo indica, de la media y varianza de los rendimientos de los activos del portafolio, los cuales son estimados con el uso del método de máxima verosimilitud que se supone una distribución normal en los rendimientos de los activos y una distribución log normal para el precio. Sin embargo, una amplia evidencia empírica indica falencias del modelo, que generan un alto error de estimación a causa de la presencia de datos u observaciones atípicas en los rendimientos de las acciones, dentro de las falencias se destacan: la presencia de alta curtosis, sesgos y heterocedasticidad de los rendimientos de los activos que conforman el portafolio, haciendo que la estimación de los parámetros del modelo generen inestabilidad en la asignación de las ponderaciones.

Adicionalmente, según DeMiguel, V., Garlappi, L. & Uppal, R. (2009) los portafolios contruidos con el modelo clásico de M-V presentan mayor error de estimación que aquellos que son conformados con base al modelo de mínima varianza.

Los modelos de mínima varianza requieren únicamente de la estimación de la matriz de covarianza de las rentabilidades de los activos, por tal razón, los pesos asignados de los activos en el portafolio presentan menor inestabilidad (Ver DeMiguel et. al. 2009). Por

otra, parte se ha encontrado en la literatura especializada que el uso de la estadística robusta para la estimación de parámetros en datos que no siguen estrictamente una función paramétrica, permite obtener resultados mas sólidos e insensibles frente a la presencia de datos atípicos, es por ello, que la estimación robusta es usada en la asignación de pesos en una cartera con el fin de minimizar el error de estimación.

Para inducir una mayor estabilidad en los pesos asignados a los activos que conforman un portafolio de inversión en esta tesis se estudian las carteras de mínima varianza obtenidas bajo la metodología rolling horizon, que es descrita en la subsección 2.2.1, para lo cual, se propone un método de estimación robusta y no paramétrica de la matriz de covarianza a partir de las bases teóricas del recorte de la media y del encogimiento de la misma para portafolios de gran tamaño. Adicionalmente, se estudian los métodos de estimación robusta de la matriz de covarianza llamados determinante mínimo de la matriz de covarianza-MCD y el recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis, que si bien, ya se encuentran introducidos en la literatura, no se encontraron estudios aplicados para la selección óptima de carteras de inversión de mínima varianza bajo la metodología rolling horizon.

El presente trabajo presenta el desempeño financiero de portafolios de inversión de diferente dimensión en términos del ratio de sharpe, del índice de turnover y de la varianza de los mismos, que fueron obtenidos, con los métodos de estimación de la matriz de covarianza indicados en el párrafo anterior. Los resultados asociados al desempeño financiero de los portafolios, fueron comparados con los resultados que obtuvieron DeMiguel, et. al. (2009), en su estudio llamado "*A generalized approach to portfolio optimization: improving performance by constraining portfolio norms*" en el capítulo 2 se presenta en detalle el procedimiento realizado.

El método propuesto en esta tesis presenta buenas propiedades, permitiendo obtener eficiencia computacional y un buen desempeño en los portafolios, en términos del ratio de sharpe, del índice de turnover y de la varianza de diferente dimensión estudiados en esta tesis. Por otra parte, se presenta el estudio de la sensibilidad de los métodos de estimación de la matriz de covarianza estudiados en esta tesis y de la matriz de covarianza clásica, frente a la presencia de datos atípicos.

Este trabajo esta conformado por el desarrollo de cinco capítulos. El capítulo 1, presenta el estado del arte de la teoría relacionada con la selección de portafolios de inversión, donde se hace énfasis en las carteras de mínima varianza y en los principales métodos robustos propuestos en la literatura para la estimación de la matriz de covarianza. En el capítulo 2, se presenta la propuesta metodológica, en la que se detalla el procedimiento seguido para la selección del portafolio de mínima varianza con estimación robusta utilizando la metodología rolling horizon también implementado en DeMiguel et. al. (2009), de igual forma se explica la comparación entre los resultados del ratio de sharpe, del índice de turnover y de la varianza de los portafolios que fueron obtenidos mediante los métodos: encogimiento de la matriz de covarianza con recorte de la media, MCD y recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis, con los resultados obtenidos en el estudio de referencia.

En este capítulo, también se presenta el procedimiento implementado para el desarrollo del análisis de sensibilidad del estimador robusto de la matriz de covarianza propuesto en esta tesis y del estimador no robusto de la matriz de covarianza de la muestra frente a la presencia de datos atípicos.

En el capítulo 3, se presenta formalmente el método propuesto con el nombre de *Encogimiento de la matriz de covarianza con recorte de la media*, y se explica los tres componentes que conforman este estimador, los cuales son: la estimación de la matriz de covarianza sin estructura muestral con media recortada, la estimación de la target matrix y la estimación de la constante óptima de contracción.

En el capítulo 4, se encuentran los resultados relacionados con el desempeño financiero en términos del ratio de sharpe, del índice de turnover y de la varianza de los cuatro portafolios de mínima varianza donde el parámetro de la matriz de covarianza se estima mediante cuatro distintos métodos que son: encogimiento de la matriz de covarianza con recorte a la media, determinante mínimo de la matriz de covarianza MCD, recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis y la matriz de covarianza clásica o habitual.

En este capítulo también se encuentran los resultados relacionados con la sensibilidad de las matrices de covarianzas mencionadas anteriormente ante la presencia de datos atípicos en una base de datos generada de forma sintetica. Y finalmente, en el capítulo 4,

se presentan las conclusiones y recomendaciones más relevantes y significativas del
trabajo de investigación aquí presentado.

1.Estado del arte

La selección de portafolios de inversión, obedece a la conducta racional del inversionista, es decir, éste prefiere distribuir el capital entre un conjunto de activos de tal forma que sea maximizado el rendimiento y minimizado el riesgo de la inversión (Markowitz H, 1952; Markowitz, H. ,1959), donde el rendimiento de cualquier portafolio, es considerado una variable aleatoria, por ende el inversionista estima una distribución de probabilidad para el periodo de estudio. Markowitz propone carteras diversificadas y eficientes, es decir, portafolios contruidos de un conjunto de activos que presentan diferentes niveles riesgo, de rendimiento y variedad de títulos, este conjunto de activos busca que se limite la exposición a un riesgo en particular. De acuerdo con Bodie Z., Kane A. & Marcus A. (2004), el riesgo que permanece incluso tras la diversificación se llama riesgo de mercado, que es el atribuible a fuentes de riesgo de todo el mercado. El riesgo que se puede eliminar mediante la diversificación se denomina riesgo único o riesgo no sistemático. Por otra parte los portafolios eficientes son un conjunto carteras que ofrecen una tasa esperada de rentabilidad mayor para cada nivel de la desviación típica de la cartera, estas se encuentran representadas en un grafico que se denomina frontera eficiente.

El valor esperado de la variable aleatoria u activo que hace parte de un portafolio es utilizado para cuantificar la rentabilidad de la inversión. El riesgo de la inversión es medido habitualmente por la varianza o la desviación estándar y son utilizadas para medir la dispersión Franco C., Avendaño C & Barbutín H.(2011) citando a Markowitz, 1952). Estos conceptos fueron formalizados por Harry Markowitz, quien en el año 1952 introdujo en el ámbito económico-financiero el modelo matemático clásico para la selección de portafolios, el cual, consiste en el planteamiento de un modelo de optimización cuadrática conocido comúnmente como el modelo clásico de Media-Varianza (M-V) y se encuentra definido en el problema de optimización representado por

la Ecuación 1, donde los parámetros para estimar son: la media y la varianza del portafolio.

$$\text{Min } [w^t \hat{\Sigma} w - \frac{1}{\gamma} \hat{\mu}^T w] \quad (1)$$

Sujeto a:

$$w^t \hat{\mu} = r^*$$

$$\vec{1}^t w = 1$$

$$w_i \geq 0; \quad i = 1, \dots, N$$

Donde w es el vector de pesos del portafolio, $\hat{\mu}$ es el estimador de la rentabilidad media, $\hat{\Sigma}$ es el estimador de la matriz de covarianza, N es el número de activos que conforman el portafolio, r^* es el rendimiento esperado del portafolio y γ indica el grado de aversión al riesgo del inversionista. Es de anotar que la rentabilidad y la varianza del portafolio, en el modelo clásico son estimados mediante el método de máxima verosimilitud, el cual supone, que los rendimientos presentan una distribución de probabilidad normal (Scutell M. & Recchia, R. 2013). El estimador común de estos parámetros del modelo clásico se muestran en las Ecuaciones 2 y 3.

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_{kj} \quad (2)$$

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (r_{ki} - \hat{\mu}_i)(r_{kj} - \hat{\mu}_j)^T \quad (3)$$

Donde,

$\hat{\mu}_j$ y \hat{S}_{ij} corresponden a la media y covarianza muestral respectivamente, N indica la cantidad de observaciones de cada variable y r_{ki} y $n = 1, 2, \dots, N$.

Como se mencionó anteriormente, los estimadores de máxima verosimilitud traen consigo bondades cuando existe la presencia de normalidad en la distribución de probabilidad de las variables aleatorias, ya que es fácil de construir y provee estimaciones insesgadas, sin embargo tiene comportamientos indeseables bajo un escenario de una distribución no normal de las variables aleatorias, especialmente cuando el número de variables es menor o igual a la cantidad de observaciones de la muestra, ya que no minimiza el error cuadrático medio, provee estimaciones sesgadas y el cálculo matemático de la estimación resulta ser más complejo.

Los autores Lauprete, J.G., Samarov M.A. & Welsch E. R. (2002) indican que el alejamiento entre una serie histórica de rendimientos y una distribución normal, ocasiona que la estimación de los parámetros sea influenciada por colas marginales pesadas, lo anterior, es particularmente importante para la selección de la cartera, dado que una amplia evidencia indica que la distribución empírica de los rendimientos por lo general se desvía de la distribución normal, produciendo un error de estimación, que ocasiona que los pesos de cartera resultantes fluctúen sustancialmente con el tiempo (Black F., Litterman R., 1992; DeMiguel & Nogales, 2007; DeMiguel, Garlappi, & Uppal, 2009).

El estudio de Markowitz (1952) propició una corriente de investigación en torno al campo de selección de portafolios que proporcionó las bases para la formulación matemática y estadística de avances significativos, entre ellos se encuentra el planteamiento del modelo de Valoración de activos financieros (CAPM) por parte William F. Sharpe en el año 1964, John V. Lintner Jr. en el año 1965 y Jan Mossin en el año 1966 quienes trabajaron de forma independiente (Useche A, 2015). El CAPM *“permite hallar la tasa de retorno esperada de un activo riesgoso, mediante una ecuación lineal que añade a la tasa libre de riesgo una prima de riesgo, acorde con la sensibilidad del retorno del activo riesgoso frente al comportamiento del mercado, expresada con el coeficiente Beta”* (Useche A, 2015 citando a Dubova 2005, González & Nave, 2014)

Adicionalmente se ha estudiado que los portafolios contruidos con base en el modelo clásico de M-V presentan mayor error de estimación que aquellos que son conformados con base al modelo de mínima varianza, dado que gran parte de la inestabilidad de las carteras contruidas el modelo M-V se debe a la estimación de los rendimientos medios de los activos, esta afirmación está respaldada por una amplia evidencia empírica que muestra que la cartera de mínima varianza normalmente obtiene mejores resultados

fuera de la muestra que cualquier otra cartera de media-varianza (DeMiguel & Nogales, 2007). De acuerdo con los autores (Puerta & Laniado, 2010, p 252):

Los portafolios de mínima varianza equivalen a los portafolios de M-V cuando el parámetro de aversión al riesgo tiende a infinito, además, para implementar esta política sólo se utiliza la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de las rentabilidades, no se tiene en cuenta la estimación de las rentabilidades esperadas; con lo cual, las ponderaciones óptimas de esta estrategia son más estables y fluctúan menos en cada rebalanceo, respecto a las ponderaciones calculadas con la política M-V.

Los autores DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009) indican que cuando no hay ausencia de ventas en corto, la optimización de la cartera se realiza por medio del modelo de optimización de mínima varianza que busca minimizar la varianza del portafolio de inversión, siempre y cuando la totalidad del capital de inversión sea asignado en los activos que lo conforman. El problema de optimización de mínima varianza es representado mediante en la Ecuación 4.

$$\min_w \quad \vec{w}^T \hat{\Sigma} w \quad (4)$$

sujeto a:

$$\vec{w}^T \vec{1} = \vec{1}$$

Donde $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$ es el vector de pesos de la cartera, $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^N$ es la matriz de covarianza estimada, $\vec{w}^T \hat{\Sigma} w$ es la varianza del rendimiento de la cartera, $\vec{1} \in \mathbb{R}^N$ es la vector de unos, y la restricción $w^t \vec{1} = 1$ asegura que los pesos de la cartera sumen uno, es decir, indica que el inversionista gasta exactamente el capital disponible (Medina L. A. , 2003).

Pese a que los portafolios conformados con el modelo de mínima varianza presentan menor fluctuación en la asignación de los pesos de los activos del portafolio, su

sensibilidad ante error de estimación es considerable, debido a que la estimación de la matriz covarianza también es realizada a partir del método de máxima verosimilitud (DeMiguel & Nogales, 2007), este hecho, como se mencionó en párrafos anteriores, supone una distribución de probabilidad normal de los rendimientos de los activos, supuesto que normalmente no se cumple.

Con el fin de reducir o mitigar el efecto del error de estimación en el proceso de optimización de los portafolios de mínima varianza, los expertos han utilizado diversas herramientas matemáticas y estadísticas, como son: las políticas bayesianas, los modelos de factores, la imposición de restricciones de venta en corto (DeMiguel & Nogales, 2007), y la estimación robusta.

Las políticas bayesianas se construyen utilizando estimadores que se generan al combinar las creencias previas del inversionista con la evidencia obtenida de los datos históricos sobre los rendimientos de los activos, es decir, los modelos bayesianos incorporan conocimiento previo para poder estimar modelos útiles dentro de un espacio muestral y de este modo poder estimar parámetros que provengan de la experiencia o de una teoría probabilística Cano J.A., Carazo C. & Salmerón D. (2017). Adicionalmente, los autores Fabozzi, F. J., Huang, D., & Zhou, G. (2010) indican que la verdadera ventaja del enfoque bayesiano es su capacidad de utilizar el conocimiento previo de un inversor. La incorporación de la predictibilidad del retorno juega un papel importante en las decisiones de la cartera, una predictibilidad estadísticamente insignificante puede ser económicamente significativa (Fabozzi, F. J., Huang, D., & Zhou, G. ,2010 citando a Kandel & Stambaugh, 1996).

Fischer Black & Robert Litterman (1991, 1992) propusieron un modelo para la selección óptima de portafolios el cual se basa en los métodos bayesianos, dado que incorpora las expectativas futuras que tienen los inversionistas sobre los activos serán destinados los recursos (Giraldo Cárdenas, L., Díaz Zapata, J. M., Arboleda Ríos, S. M., Galarcio Padilla, C. L., Lotero Botero, J. E., & Isaza Cuervo, F. , 2015).

Los modelos de factores es utilizado para estimar la matriz de covarianza de los rendimientos de los activos, consiste en reducir el número de parámetros a estimar (DeMiguel & Nogales, 2007), cuando existen grandes conjuntos de datos que contienen variables de gran dimensión. En este caso, usar la matriz de covarianza muestral es

inapropiado porque se vuelve singular o mal condicionada cuando el número de variables p es mayor que en el número de observaciones n (Ikeda Y, & Kubokawa T. (2016). Incluso si $p < n$, la matriz de covarianza muestral es inestable como lo notaron Fan J, Fan Y, Lv J. (2008). Por su parte, las restricciones de venta en corto es utilizado para aumentar la estabilidad de los pesos de la cartera. Los autores DeMiguel & Nogales (2007) citando a Jagannathan & Ma (2003) muestran que la imposición de restricciones de venta corta ayuda a reducir el impacto del error de estimación en la estabilidad y rendimiento de la cartera de varianza mínima.

1.1 Estadística robusta

Existen casos en los que las variables aleatorias no siguen una función de probabilidad conocida, ocasionando que los modelos que se basan en supuestos con distribuciones paramétricas generen resultados erróneos dado que no se cumple el principio de homocedasticidad del modelo, y por lo tanto, estos modelos conllevan a conclusiones poco útiles, en tales casos se puede hacer uso de los métodos no paramétricos, dado que suponen supuestos no tan estrictos en lo relacionado a la función de distribución de probabilidad o también es posible utilizar los métodos robustos que implican que los niveles de significancia tengan poca sensibilidad si la población se desvía substancialmente de los supuestos que la sustentan (Box G., 1953).

La definición del termino robusto en la literatura estadística fue empleado por primera vez por George Box en el año 1953 por medio de la publicación titulada "*Non-Normality and test of variance*". Por su parte Tukey en el año 1960 fue el primero en reconocer la extrema sensibilidad de algunos procedimientos estadísticos convencionales a las desviaciones aparentemente menores de los supuestos de la distribución de la variables (Huber P., 2014). El autor Peter Huber en el año 1964 formalizó matemáticamente el enfoque robusto a partir del modelo Minmax, el cual, garantiza la minimización máxima de la desviación absoluta, es decir, bajo esta estrategia de inversión una variable del portafolio puede ser eliminada si su retorno es muy bajo o si el riesgo es muy elevado (Puerta & Laniado, 2010).

Los trabajos realizados por Fabozzi, Cfa, Kolm, Pachamanova, & Focardi (2007); DeMiguel & Nogales (2007) indican que la estadística robusta es un técnica para

encontrar modelos robustos y es usada en la asignación de activos en una cartera con el fin de minimizar el error de estimación que se obtiene por la presencia de datos atípicos, en consecuencia, los modelos de portafolios robustos buscan carteras poco sensibles ante valores atípicos en la serie de rendimientos de los activos que conforman el portafolio de inversión.

Los métodos robustos asumen que existen parámetros en las distribuciones en estudio y tratan de minimizar los efectos de los valores atípicos (Fabozzi et al., 2007), por lo tanto, es conveniente utilizar la estadística robusta para la estimación de los parámetros implicados en el modelo de estudio. Con base a lo anterior y de acuerdo con DeMiguel & Nogales (2007) es pertinente conocer que los estadísticos robustos evalúan los cambios en las estimaciones debido a pequeños cambios en las suposiciones básicas y crea nuevas estimaciones que son insensibles a pequeños cambios en algunos de los supuestos de los modelos estadísticos, éstos, cambian los criterios de optimización con respecto a la estadística clásica, ya que ésta busca mayor estabilidad y menor sensibilidad a cambios bruscos en los datos.

1.2 Estimación robusta de la matriz de covarianza

A continuación se presenta una descripción breve de los métodos robustos existentes en la literatura que son mas utilizados, debido a las ventajas que implican, las cuales serán detalladas a continuación.

Con base en lo expresado anteriormente, existen diversos métodos de estimación robusta de la matriz de covarianza que han sido utilizados ampliamente en la práctica, se dividen bajo dos enfoques el primero hace referencia a la detección de datos atípicos donde se encuentran los métodos: la desviación mediana absoluta-MAD, análisis de componentes principales robusto y estimación de la matriz de covarianza a partir de la distancia de Mahalanobis con recorte chi-cuadrado. El segundo enfoque se refiere a la estimación robusta, que abarca los siguientes métodos: el estimador M propuesto, el estimador S, el encogimiento de la varianza, el método robusto de estimación del determinante mínimo de la matriz de covarianza (MCD) y el estimador de Sthangel-Donoho. Adicionalmente en la literatura se encuentran otros métodos usados con frecuencia para la estimación robusta de la media como son: la mediana y la media recortada que también serán explicados.

1.2.1 Desviación mediana absoluta (MAD) y Comedian (COM)

De acuerdo con Falk M. (1997) la desviación absoluta respecto a la mediana (MAD) de una variable aleatoria X es una medida robusta que es conocida en el ámbito académico como un estimador robusto de escala de la desviación estándar (DeMiguel & Nogales, 2007), ver Ecuación 17.

$$MAD(X) = med(|X - med(X)|) \quad (17)$$

Donde med denota la mediana de la variable aleatoria X .

La medida del MAD es posible aplicarla con una variable aleatoria, por lo que el análisis de dos variables aleatorias por medio del MAD no es posible, en tal sentido, existe una medida robusta de la covarianza entre dos variables aleatorias X vs. Y que es conocida como Comedian (COM), su cálculo se realiza utilizando la Ecuación 18:

$$COM = med(((X - med(x))(Y - med(Y))) \quad (18)$$

Las medidas de MAD Y COM presentan las siguientes proposiciones que se encuentran representados en lemas, para ampliar información ver Falk M. (1997):

Lema 1: para números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $med(aX + b) = a med(X) + b$

Se hace notar que el procedimiento de igualdad incluye un a negativo haciendo que $COM(X, Y) = med((X - med(X))(Y - med(Y)))$

Lema 2: Si X y Y son independientes, entonces $COM(X, Y) = 0$

Lema 3: Se tiene que $|med(X)| \leq med(|X|) = (med(|X|^p))^{1/p}$ para cualquier $p > 0$

Es de anotar que los lemas 1 y 3 implican que $MAD(aX + b) = |a|MAD(X)$ y $COM(X, Y) = a MAD(X)^2$, si $Y = aX + b$

Adicionalmente la medida Comedian es simétrica, invariante en la ubicación y equivariante en la escala, es por ello, que la correlación se puede expresar como se muestra en la Ecuación 19, debido a, $\rho = 0$ si X y Y son independientes.

$$\rho(X, Y) = \rho = \frac{COM(X, Y)}{MAD(X)MAD(Y)} \quad (19)$$

El estudio “*On mad and comedians*” realizado por Michael Falk en el año 1997, investiga en detalle la medida Comedian para un escenario de normalidad y establece una normalidad asintótica y de fuerte consistencia de las contrapartes empíricas. La normalidad asintótica hace referencia al caso donde X y Y son variables independientes y la distribución límite es afectada si se conocen las medidas marginales de $MAD(X)$ y $MAD(Y)$.

En año 2012, los autores Sajesh y Srinivasan realizaron la publicación “*Outlier detection for high dimensional data using the Comedian approach*” donde proponen un método alternativo de detección de valores atípicos con datos multivariantes basado en el estudio realizado por Falk en el año 1997. En el año 2016 los autores Di Palma M & Gallo M (2016) diseñaron un software llamado CoMCoDa basado en la desviación media absoluta (MAD), el cual es capaz de detectar los datos atípicos en los modelos de estimación conformados con datos compuestos, a diferencia de la medida del MAD propuesta por Falk M. (1997), proponen un factor de corrección con el valor de 1,4826 como se muestra en la Ecuación 20. Adicionalmente, es de anotar que el estimador robusto MAD es imparcial a la distribución normal lo que genera que sea un estimador apto en las distribuciones de probabilidad no paramétricas o con presencia de datos atípicos.

$$MAD = 1.4826 \text{ median } (|x - \text{median}(x)|) \quad (20)$$

1.2.2 Análisis de componentes principales robusto

El análisis componentes principales (ACP) es una de las técnicas de mayor difusión y utilidad entre las técnicas multivariantes utilizadas para la detección de valores atípicos

(Muñoz, J., & García, M. , 2013) (Verboven, S., & Hubert, M. , 2010) y fue introducida formalmente por Hotellin en el año 1933 (Restrepo L, Posada S, Noguera R. 2012 citando a Del Ángel, 2004).

El autor Peña D. (2002) indica que mediante el uso del ACP es posible reducir la dimensionalidad de los datos siempre y cuando sea posible describir los valores de p variables por un pequeño subconjunto $r < p$ de ellas, a costa de una pequeña pérdida de información, donde r son variables construidas como combinaciones lineales de las p variables originales. La utilidad del ACP radica en que:

Permite representar óptimamente en un espacio de dimensión pequeña, observaciones de un espacio general p -dimensionalidad. En este sentido componentes principales es el primer paso para identificar posibles variables no observadas, que están generando variabilidad de los datos. Adicionalmente, permite transformar las variables originales, en general correlacionadas, en nuevas variables incorrelacionadas, facilitando la interpretación de los datos (Peña, 2002, p. 137)

La matriz de covarianza y su correspondiente matriz de correlación son el punto de partida de muchos análisis multivariados como lo es el ACP (Montaño N. & Zurita G., 2009). El espacio de dimensión pequeña r se encuentra representado por valores y vectores propios de la matriz de covarianza (Peña, 2002), los valores propios más pequeños y más grandes de una matriz de covarianza están relacionadas con las varianzas mínimas y máximas de la cartera seleccionada, respectivamente, y los vectores propios están relacionados con asignación óptima de cartera (Fan J, Fan Y, Lv J, 2008)

El uso de componentes principales robusto (ARCP) permite determinar las direcciones de la varianza de forma robusta en lugar de usar las direcciones de la varianza muestral, con el fin reducir, el incremento de la varianza generado por la existencia de observaciones atípicas (Martínez H., Medrano B. E., Fernández L. y Tejada Y., 2013 citando a Jolliffe, I., 2002)

El ARCP puede detectar dos tipos de observaciones atípicas: los puntos de palanca (leverage) y las observaciones atípicas ortogonales (Bueno D., 1976), que una vez son identificadas, pueden ser retiradas del análisis y luego volver a aplicar el ACP. Retirar los valores atípicos permite que la dirección de las componentes principales se encuentre en el sentido de la mayor variabilidad de los datos (Martínez, et al. 2013). Existen otros enfoques robustos, entre ellos se destaca el cálculo de los auto vectores y auto valores a partir de la matriz de covarianza estimada mediante el método MCD una vez se ha reducido la dimensionalidad de los datos. Otro enfoque se basa en el modelo ROBPCA el cual fue propuesto por Mia Huber, Peter Rousseeuw y Branden Karlien en el año 2005, este modelo combina ideas de búsqueda de proyección con la estimación robusta de la matriz de dispersión. ROBPCA produce estimaciones más precisas en conjuntos de datos no contaminados y estimaciones más robustas en los datos contaminados. Como subproducto, ROBPCA produce un diagrama de diagnóstico que muestra y clasifica los Outliers (Hubert, M., Rousseeuw, P. J., & Branden, K. Vanden. , 2005).

1.2.3 Estimador distancia de Mahalanobis robusto

Como se indicó en la subsección 1.2.1 la determinación matemática de la distancia de Mahalanobis se encuentra definida mediante la Ecuación 11, que permite detectar datos atípicos multivariantes, a partir de la descripción de la distancia entre cada punto de datos y de centro de masa. Cuando un punto se encuentra distante del centro de masa, se consideran valores atípicos (Muñoz J & García M. 2013). De la Ecuación 11, es importante resaltar que la estimación de la matriz de covarianza $\hat{\Sigma}$ propuesta se realiza por medio del método de estimación de máxima verosimilitud, lo que supone la presencia de la distribución normal en los datos multivariantes.

Adicionalmente, según Muñoz J & García M (2013):

Los efectos de enmascaramiento y empantanamiento juegan un rol importante en la adecuación de la distancia de Mahalanobis como criterio para la detección de valores atípicos,..., estos problemas se pueden resolver utilizando la estimaciones robustas como son: el estimador M, el estimador S, el estimador MCD, entre otros.

En la literatura existente, se ha encontrado que Rousseeuw P. & Van Zomeren (1990) propusieron un método para estimar la distancia robusta de Mahalanobis, la cual consiste

en estimar los parámetros de dispersión y localización mediante el método MCD propuesto por Rousseeuw (1985).

Para datos multivariantes distribuidos normalmente, los valores de la distancia de Mahalanobis tienen aproximadamente una distribución chi-cuadrado con p grados de libertad. En consecuencia, aquellas observaciones con una distancia de Mahalanobis grande se indican como valores atípicos (Muñoz J. & García M., 2013).

1.2.4 Estimador M

Los portafolios robustos basados en el estimador M de la cartera, tienen como medida de riesgo la variable s_m (ver Ecuación 5), este estimador se basa en una función de pérdida simétrica convexa ρ .

$$s_m = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \rho(w^T r_t - m) \quad (5)$$

Donde m es el estimador M del retorno de cartera y se encuentra definido en la Ecuación 6. Es de anotar que para valores grandes de $|r|$, todas las funciones de pérdida se encuentran debajo de la función cuadrada. Esto hace que los estimadores-M sean más robustos con respecto a las desviaciones de la normalidad de la distribución empírica que la media y la varianza tradicionales (DeMiguel & Nogales, 2007).

$$m = \arg \min \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \rho(w^T r_t - m) \quad (6)$$

Los portafolios construidos con la política M de mínima varianza se encuentran definidos matemáticamente mediante el siguiente problema de optimización representado en la Ecuación 7, el cual indica que el objetivo es minimizar el estimador M de riesgo de la cartera.

$$\min \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \rho(w^T r_t - m) \quad (7)$$

Sujeto a:

$$w^T e = 1$$

Con base en DeMiguel & Nogales (2007) las carteras M generalizan varias políticas de cartera bien conocidas. Por ejemplo, la cartera de varianza mínima es la cartera M correspondiente a la función de pérdida cuadrada (L2) definida por $\rho(r) = 0.5 r^2$. Además, la cartera que minimiza la desviación absoluta media de la mediana (MAD) es la cartera M correspondiente a la función de pérdida L1 $\rho(r) = |r|$. Sin embargo la función de pérdida de Huber es la que presenta mejor rendimiento fuera de la muestra, la cual se encuentra definida mediante la Ecuación 8.

$$\rho(r) = \begin{cases} r^2/2, & |r| \leq c \\ c(|r| - c/2), & |r| > c \end{cases} \quad (8)$$

De acuerdo con Montaña N., Zurita G. (2009) el estimador M se puede interpretar como una matriz de covarianza ponderada y un vector de medias ponderado, donde las ponderaciones w_1 y w_2 tipo Huber dependen de la distancia de Mahalanobis (ver Ecuación 9 y Ecuación 10)

$$w_1 = \begin{cases} 1 & d_i \leq k \\ \frac{k}{d_i} & d_i \geq k \end{cases} \quad (9)$$

$$w_2(d_i^2) = \frac{\{w_1(d_i)\}^2}{\beta} \quad (10)$$

La distancia de Mahalanobis fue propuesta por Mahalanobis en el año 1930, su expresión matemática esta representada en la Ecuación 11, y es utilizada para la

detección de datos atípicos, debido a que mide la distancia desde un punto x al centro μ de los datos en la métrica Σ , lo que significa que la distancia depende de la matriz de covarianza Σ .

$$d_i = d_i(x_i, \mu, \Sigma) = \sqrt{(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_i - \mu)} \quad (11)$$

Donde x es un vector de variables $x = x_1, x_2, \dots, x_k$, $\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ es un vector k y Σ es una matriz simétrica $k \times k$ de dimensión. Los parámetros μ y Σ en el modelo propuesto por Mahalanobis son estimados mediante el método de máxima verosimilitud (Leys C., Klein O. & Dominicy Y. y 2018 citando a Mahalanobis, 1930), el cual supone una distribución normal de los datos, en consecuencia entre los académicos ha surgido la motivación de estudiar la distancia robusta de Mahalanobis, para ampliar información relacionada, consultar Leys C., Klein O. & Dominicy Y. (2018).

1.2.5 Estimador S

La principal ventaja de los estimadores S es que son equivariantes con respecto a escala; es decir, al multiplicar el conjunto de datos por una constante no cambia el valor del estimador S. Esta propiedad no es propia de los estimadores M (DeMiguel & Nogales, 2007). Los estimadores S de rendimiento y riesgo se definen como los valores de m y s que resuelven el siguiente problema de optimización formulado en la Ecuación 12.

$$\min s \quad (12)$$

sujeto a:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho \left(\frac{w^T r_t - m}{s} \right) = k$$

Dónde ρ es la función de pérdida y k es la expectativa de esta función de pérdida evaluada en una distribución normal estándar al azar. Los estimadores S permiten la flexibilidad para elegir el punto de ruptura, que es la cantidad de datos que se desvía del modelo de referencia que un estimador puede aceptar al proporcionar información significativa, el punto de ruptura máximo que permite este estimador es del 50% (DeMiguel & Nogales, 2007).

1.2.6 Determinante mínimo de la matriz de covarianza (MCD)

El método de determinante mínimo de la matriz de covarianza, fue propuesto por Rousseeuw P.J en el año 1984 mediante el trabajo "*Least Median of Squares Regression*". Este es uno de los estimadores pioneros equivariantes y altamente robustos de localización y dispersión multivariada (Verboven, S., & Hubert, M., 2010) citando a Rousseeuw P.J (1984)), su objetivo es encontrar h observaciones (de N) cuya matriz de covarianza tenga el determinante más bajo (Rousseeuw, P.J. & Driessen, K.V., 1999). Este estimador también se puede usar para detectar valores atípicos al observar la distancia robusta de Mahalanobis según las estimaciones de MCD y es designado por una distribución elíptica, simétrica y unimodal.

El método MCD propuesto inicialmente, es factible para una cantidad de variables p moderada, pero para p grande es computacionalmente muy costoso ya que el estimador se calcula por submuestreo (Sajesh & Srinivasan, 2012), el MCD está destinado a variables continuas p , el número de observaciones n es al menos 5 veces el número de variables p . En consecuencia, sea x_{MCD} una sub-muestra de tamaño h desde $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_N$ tal que $h = \left\lceil \frac{n+p+1}{2} \right\rceil$ donde $n/2 \leq h \leq N$. La estimación del valor esperado μ_{MCD} por el método MCD es la media de los h puntos, mientras que la estimación de la dispersión es su matriz de covarianza Σ_{MCD} , multiplicada por un factor de consistencia que por lo general tiene el valor de 0,75 (Rousseeuw, P.J. & Driessen, K.V., 1999) véase en la Ecuación 13 y en la Ecuación 14.

$$\hat{\mu}_{MCD} = \frac{1}{h} \sum_{j \in x(MCD)} x_j \quad (13)$$

$$\Sigma_{MCD} = \frac{c(h)s(h,n,p)}{h-1} \sum_{j \in x(MCD)} (\vec{x}_j - \overline{\mu_{MCD}})(x_j - \overline{\mu_{MCD}})^T \quad (14)$$

con $j = 1, \dots, h$

Donde $c(h)$, corresponde al factor de consistencia (ver Ecuación 15) que hace que el estimador MCD para que la matriz de covarianza tienda a una distribución Fisher consistente, cuando la distribución \vec{X} es elíptica y unimodal, por ejemplo, $\vec{X} \sim N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$

$$c(h) = \frac{h/N}{P(\chi^2 < \chi^2_{p, 1-h/N})} \quad (15)$$

En la investigación “*Fast Algorithm for MCD*” realizada por Rousseeuw, P.J. & Driessen, K.V. (1999) se propuso el algoritmo FAST-MCD, que sirve para calcular el MCD de forma computacionalmente eficiente. Aunque se espera que el algoritmo FAST-MCD sea más rápido que los algoritmos avanzados y los algoritmos híbridos, el tiempo de ejecución requerido es bastante sustancial para los grandes p (Sajesh & Srinivasan, 2012), concretamente, en el algoritmo proponen una matriz de covarianza de determinante mínimo para la detección de datos atípicos multivariantes, la cual, posee propiedades asintóticas que hacen posible la comparación con otros estimadores con puntos de ruptura altos. Este algoritmo es capaz de detectar un ajuste exacto para un conjunto de datos pequeños y de gran tamaño, es decir, un hiperplano que contiene h o más observaciones. Adicionalmente, determinaron que cuanto mayor es el valor de h , más robusto es el estimador MCD dado que el punto de ruptura es alto. Este algoritmo hace del método MCD una herramienta de rutina para el análisis de datos multivariantes que permite la detección de valores atípicos y distancias robustas que no son sensibles al efecto de enmascaramiento.

1.2.7 Encogimiento de la matriz de covarianza

El encogimiento de la matriz de covarianza es una técnica que hace parte de la teoría de decisión en estadística y fue introducida Stein C. (1956), se basa principalmente en imponer una estructura a la matriz de covarianza muestral, existen diversas formas de imponer estructuras entre ellas se destaca el tomar un promedio ponderado de la matriz de covarianza de la muestra con el estimador del modelo de un solo índice introducido por de Sharpe W. (1963). Una vez se ha impuesto una estructura se contrae la matriz de covarianza muestral hacia la matriz de covarianza objetivo estructurada con una constante de intensidad optima Godino F. (2014), estos conceptos se explican en párrafos posteriores. Esta técnica denominada shrinkage tiene como objetivo una compensación entre el sesgo y la varianza de las dos matrices de covarianza estimadas (Fan J, Fan Y, Lv J, 2008). La técnica se denomina shrinkage (o de encogimiento).

Los autores Ledoit O. & Wolf M. (2004) en el estudio titulado "*Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix*" indican que cualquier estimador de contracción tiene tres componentes: un estimador sin estructura, un estimador con mucha estructura denotado por F y una constante de contracción. El estimador sin estructura es la matriz de covarianza muestral \hat{S} .

Siguiendo a Ledoit O. & Wolf M. (2004b) el estimador con estructura, también es conocido como shrinkage target que se basa en el modelo de correlación constante, el cual indica que todas las correlaciones son idénticas, por ello, el promedio de todas las correlaciones muestrales es el estimador de la correlación constante común, este número junto con el vector de varianzas muestrales permite obtener la matriz objetivo o bien, el shrinkage target matrix (F). Es de anotar que para obtener el estimador F es necesario el cumplimiento de dos requisitos, el primero se basa en que exista un número pequeño de parámetros altamente estructurados y que a su vez refleje importantes características de la cantidad de parámetros sometida a la estimación.

La constante de contracción es un valor que se denota por el símbolo λ el cual se encuentra comprendido entre 0 y 1, el valor óptimo de esta constante λ^* , es aquel que minimiza la distancia esperada entre el estimador shrinkage y la verdadera matriz de covarianza. Con base en la breve explicación de los componentes del estimador de

contracción, la Ecuación 16 presenta una combinación lineal convexa para estimación de la matriz de covarianza shrinkage.

$$\hat{\Sigma}_{shrunk} = \lambda^* F + (1 - \lambda^*) S \quad (16)$$

Cuando la cantidad de variables p es menor a la cantidad de observaciones N , esto es, $p < N$ el cálculo del estimador shrinkage de matriz de covarianza mediante la imposición de una estructura de factor único, permite obtener resultados de estimación que minimizan el error MSE asintóticamente, por lo tanto las matrices son bien condicionadas, y adicionalmente es posible invertir la matriz de covarianza (Ledoit, O. Wolf M., 2004).

Sin embargo cuando $p > N$ no es posible invertir la matriz de covarianza, en consecuencia, propusieron una estructura para la matriz de covarianza basada en la función de pérdida cuadrática, otorgando así, bondades asintóticas para el caso de que el número de variables p tienda al infinito al igual que el número de observaciones sin embargo este último puede ser menor que p .

1.2.8 Estimador de Sthangel- Donoho (D-S)

De acuerdo con Montaña y Gaudencio (2009) este estimador fue propuesto por Stahel en el año 1981 y Donoho en el año 1982, y considera que un valor aberrante multivariado debe serlo también en alguna proyección univariada. En consecuencia el estimador D-S, es un vector de media y la matriz de covarianzas ambos ponderados de tal manera que la ponderación de x_i es una función de “lejanía” de x_i , denotada $t(x_i)$. Las funciones de ponderaciones w_1 y w_2 se encuentran definidas en la Ecuación 21 y en la Ecuación 22.

$$\hat{\mu}_{D-S} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_{i1}} \sum_{i=1}^n w_{i1} x_i \quad (21)$$

$$\hat{\Sigma}_{D-S} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_{i2}} \sum_{i=1}^n w_{i2} (x_i - \hat{\mu}) (x_i - \hat{\mu})^T \quad (22)$$

Donde, $w_{ij} = W_j(t(x_i))$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$

A continuación, se describen algunos estimadores robustos para la estimación de la media del rendimiento del portafolio de inversión.

1.2.9 Mediana muestral

La mediana de los datos es un estimador robusto de media y es equivariante con respecto a la transformación-S (Falk, 1997), esto significa matemáticamente, la desigualdad $P\{X \leq med(X) \geq 1/2\} \leq P\{X \geq med(X)\}$, que indica la probabilidad de que la mediana de la variable aleatoria X se encuentre entre X y el 50% de los datos debe ser menor o igual a la probabilidad de X sea mayor o igual a su mediana.

La mediana muestral “ *se obtiene al ordenar primero las n observaciones de menor a mayor (incluso valores repetidos, de manera que cada observación muestral aparezca en la lista ordenada)*” (Devore J., 2005, p 31), en consecuencia:

La Ecuación 23 muestra el cálculo de la mediana en el caso de que la cantidad de observaciones sea impar.

$$\overline{mediana} = \left(\frac{N+1}{2}\right)^{ésimo} \text{ valor estadístico ordenado} \quad (23)$$

En caso contrario, la Ecuación 24 representa el cálculo del valor de la mediana, que indica el promedio de los dos valores medios ordenados:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{ésimo} \text{ y } \left(\frac{N}{2} + 1\right)^{ésimo} \text{ valor estadístico ordenado} \quad (24)$$

1.2.10 Recorte de la media

De acuerdo con Hualpa P. (2012), la media recortada $T(\alpha)$ parte de la idea que la media aritmética es simple pero susceptible a observaciones discordantes, una solución sencilla es eliminar dichas observaciones.

Para calcular esta medida, se parte de la idea de eliminar una proporción de observaciones de cada extremo de la distribución a la que se denota α , a fin de obtener una medida de localización resistente, y el recorte de los posibles valores atípicos presentes en la distribución

El valor de α debe ser una proporción fija del conjunto de datos, pudiendo tomar valores como 0.01, 0.02, 0.03, etc. siempre dependiendo de la naturaleza de los datos que se están analizando. La Ecuación 25 muestra el cálculo de la media recortada.

$$T(\alpha) = \frac{\sum_{i=g+1}^{n-g} x_i}{n-2g} \quad \text{Con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (25)$$

Donde:

n : número de observaciones ordenadas de manera ascendente.

α : la proporción de casos a eliminar en cada extremo de la distribución.

g : número de observaciones que deben ser eliminadas.

con $g = [\alpha n]$, donde $[]$ denota la parte entera resultante de la operación

2. Propuesta metodológica

Con el fin de valorar las bondades de la estadística robusta para la estimación de matriz de covarianza en la selección de portafolios de inversión se utilizaron datos reales y sintéticos. Con el primer conjunto de datos se analizó el rendimiento, estabilidad y varianza de cuatro portafolios de diferente dimensión en términos del ratio de sharpe, del índice turnover y de la varianza. Con el segundo conjunto de datos se realizó un análisis de sensibilidad donde se valora la sensibilidad de la matriz de covarianza robusta de la muestra propuesta en esta tesis, de la matriz de covarianza obtenida a partir de la distancia de mahalanobis con recorte chi-cuadrado, de la matriz de covarianza generada mediante el método de MCD y la sensibilidad de la matriz de covarianza clásica de la muestra frente a la presencia de datos atípicos.

2.1 Descripción de los datos

Como se mencionó anteriormente, para la realización del ejercicio de selección de portafolios de mínima varianza se utilizaron los datos disponibles en el portal web de Kenneth French http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html, donde proporciona la rentabilidades historicas diarias, mensuales, y anuales de diferentes carteras conformadas por acciones pertenecientes a las bolsas de valores NASDAK, NYSE y AMEX. Para este estudio se seleccionaron carteras con rentabilidades históricas mensuales.

Con el fin de realizar un benchmarking de los resultados del ratio de sharpe, del índice de turnover y de la varianza de los portafolios estimados con los métodos seleccionados en esta tesis, se tomó como estudio de referencia “*A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms*” desarrollado por DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, & Uppal, R. (2009), cuyos resultados serán presentados en la siguiente subsección, por lo tanto, se hizo necesario generar

condiciones de igualdad en la base de datos, temporalidad, y metodología de selección de portafolios de inversión.

En concordancia con lo anterior, en este trabajo de investigación se analizaron cuatro portafolios de diferente dimensión que presentan dos enfoques diferentes, primero de ellos se basa en portafolios conformados por acciones de la industria de las bolsas de valores mencionadas anteriormente, y el segundo enfoque se basa en carteras conformadas de acuerdo al tamaño y al valor de mercado de los activos.

Se estudiaron dos portafolios con activos de distintas industrias, donde el primero de ellos consta de 48 activos con rentabilidades 48 sectores industriales diferentes, entre ellos se encuentran: el sector industrial bancario, el agrícola, el de alimentos, el de cervecería y licores, el de tabaco, el de productos farmacéuticos, entre otros. El segundo portafolio contiene acciones pertenecientes otros sectores industriales, consta de 6 activos de seis industrias diferentes.

Por otra parte se estudiaron dos carteras conformadas según el tamaño y valor de mercado de las acciones, donde la primera de ellas esta compuesta por la rentabilidad de seis activos y la segunda por la rentabilidad de 25 activos.

La temporalidad del conjunto de portafolios estuvo comprendida entre julio de 1963 hasta diciembre de 2004 (498 datos). En la Tabla 3 se muestra la lista de los datos considerados en esta tesis de investigación, donde se enumeran el conjunto de datos pertenecientes a cada portafolio, así mismo, se encuentra la abreviatura utilizada para indicar el conjunto de datos conformados por N cantidad de activos con riesgo y se muestra la temporalidad que éstos abarcan.

Tabla 1 *Conjunto de datos*

Nº	Conjunto de datos	Abreviación	N	Periodo de tiempo	Fuente
1	Portafolio con diez industrias representativas de las acciones del mercado de U.S.	10 Ind	10	07/1963-12/2004	Kenneth R. French

2	Portafolio con cuarenta y ocho industrias representativas de las acciones del mercado de U.S.	48 Ind	48	07/1963-12/2004	Kenneth R. French
3	Portafolio con seis empresas clasificados por tamaño y valor de mercado Fama y French (1992)	6FF	6	07/1963-12/2004	Kenneth R. French
4	Portafolio con veinticinco empresas clasificados por tamaño y valor de mercado Fama y French (1992)	25FF	25	07/1963-12/2004	Kenneth R. French

Nota: Adaptado de DeMiguel et. al. (2009)

Por otra parte, los datos sintéticos pertenecen a una distribución elíptica, específicamente correspondieron a la generación de una distribución normal multivariante, en la subsección 2.3.

2.2 Descripción del estudio de referencia

La selección de los portafolios de inversión que fueron objeto de estudio, se basan en el problema de optimización de mínima varianza, el cual fue explicado, en el capítulo anterior. La estimación de la matriz de covarianza requerida para la selección de carteras de mínima varianza obedeció a la implementación de cuatro métodos de estimación robusta y a un método no robusto paramétrico. Dentro del conjunto de métodos robustos se encuentran: el determinante mínimo de la matriz de covarianza (MCD), estimación shrinkage de la matriz de covarianza, encogimiento de la matriz de covarianza utilizando recorte de la media el cual representa el método propuesto en esta tesis de investigación y implementación de la distancia de Mahalanobis con recorte chi-cuadrado. Por otra parte la estimación de la matriz de covarianza no robusto paramétrico corresponde a la implementación del método de máxima verosimilitud para la estimación de la matriz de covarianza. En la subsección 2.2.4 se brinda una mayor descripción del procedimiento empleado en cada uno de los métodos de estimación.

Como se mencionó en la subsección anterior, los resultados correspondientes al índice de turnover, riesgo y ratio de sharpe de cada uno de los portafolios que se sometieron a la investigación, se compararon con los resultados que obtuvieron los autores DeMiguel,

V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009) en su publicación científica titulada “*A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms*”, donde compararon la rentabilidad, la varianza, el índice de turnover y los ratios de sharpe de diferentes portafolios que se distinguen el uno del otro, en el tamaño y en el uso de diferentes métodos de estimación de la matriz de covarianza pertenecientes a la literatura. Es preciso anotar que la presente investigación se compararon los resultados relacionados con el ratio de sharpe, el índice de turnover y la varianza de los portafolios.

Es de anotar que DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009), dividieron la presentación de los resultados mencionados anteriormente en dos paneles, que se diferencian en la novedad del método de estimación de la matriz de covarianza y en la estrategia de selección del portafolio de inversión. El panel A se refiere a las estrategias que desarrollaron en su estudio y por ende, este enfoque representó una parte del aporte de su investigación. El panel B contiene las estrategias que los autores encontraron en la literatura. Para mayor comprensión, en la Tabla 2 se describe cada una de las abreviaciones de las estrategias utilizadas, en Tabla 3 se indican los ratios de sharpe de cada uno de los portafolios obtenidos en el estudio de referencia, en la Tabla 4 y en la Tabla 5 se presentan los resultados de los valores del índice de turnover y la varianza de los portafolios respectivamente que obtuvieron los autores DeMiguel, et al. (2009).

Tabla 2 Lista de portafolios considerados

Nº	Abreviación	Modelo
Panel A		
Portafolios de mínima-varianza con restricciones normativas		
1.	NC1R	Con la calibración de δ utilizando cross validation sobre la varianza del portafolio
2.	NC1R	Con la calibración de δ maximizando la rentabilidad del periodo anterior
Portafolios de mínima-varianza con restricciones normativas		
3.	NC2V	Con la calibración de δ utilizando cross validation sobre la varianza del portafolio
4.	NC2R	Con la calibración de δ maximizando la rentabilidad del periodo anterior
Portafolios de mínima varianza con limitación de las restricciones normativa		
5.	NCFV	Con la calibración de δ utilizando cross validation sobre la

Nº	Abreviación	Modelo
6. NVFR	varianza del portafolio Con la calibración de δ maximizando la rentabilidad del periodo anterior	
7. PARV	Portafolios parciales de mínima varianza Con la calibración de K utilizando cross-validation sobre la varianza del portafolio	
8. PARR	Con la calibración de K maximizando la rentabilidad de la cartera en el periodo anterior	
Panel B		
Referencias simples		
9. 1/N	Portafolio equiponderado	
10. VW	Portafolio de valor-ponderado	
Portafolios que usan rendimientos medios con ventas en corto sin restricciones		
11. MEAN	Portafolio de media-varianza con parámetro de aversión al riesgo de 5	
Portafolios de mínima-varianza		
12. MINU	Portafolio de mínima-varianza sin restricciones para las ventas en corto	
13. MINC	Portafolio de mínima-varianza con restricciones de ventas en corto (Jagannathan y Ma 2003)	
Portafolios de mínima-varianza donde la matriz de covarianza es media de dos estimadores		
14. LWID	Promedio ponderado de la covarianza de la muestra y de la matriz de identidad (Ledoit y Wolf 2004)	

Nota: Traducción y adaptación de DeMiguel et. al. (2009)

Tabla 3 Ratios de sharpe de los portafolios

Estrategia	10Ind	48Ind	6FF	25FF
Enfoque A				
NC1R	0,2854	0,2886	0.3385	0,3649
NC1R	0,289	0,2831	0.3374	0,3553
NC2V	0,2919	0,2855	0.3527	0,4089
NC2R	0,3193	0,2891	0.3922	0,4278
NCFV	0,2927	0,2808	0.3479	0,3728
NVFR	0,3114	0,2723	0.3186	0,3815
PARV	0,2841	0,2823	0.3478	0,4077
PARR	0,3293	0,3166	0.3912	0,4403
Enfoque B				
1/N	0,2541	0,2563	0.2563	0,2565
VW	0,2619	0,2698	0.2437	0,2558
MEAN	0,0499	-0,0334	0.3214	0,2253

Estrategia	10Ind	48Ind	6FF	25FF
BAYE	0,1685	-0,0121	0.3666	0,3151
MINU	0,2865	0,2222	0.364	0,4199
MINC	0,2852	0,2914	0.2629	0,272
FAC1	0,306	0,2674	0.2485	0,2486
LWID	0,2962	0,262	0.3226	0,3974
LW1F	0,2902	0,2544	0.3296	0,3927
BSV3	0,1157	0,3314	0.3907	0,4047

Nota: Tomado de DeMiguel et. al. (2009)

Tabla 4 Índices de Turnover de estabilidad de los portafolios

Estrategia	10Ind	48Ind	6FF	25FF
Enfoque A				
NC1V	0.1494	0.268	0.1729	0.2407
NC1R	0.6013	0.8232	1.0064	0.9767
NC2V	0.1448	0.3266	0.1946	0.457
NC2R	1.0177	2.7556	1.6594	3.6275
NCFV	0.1052	0.2469	0.279	0.4134
NCFR	0.6944	2.3117	1.9952	3.356
PARV	0.1689	0.3838	0.26	0.4628
PARR	1.0414	2.4846	1.6407	3.5657
Panel B				
1/N	0.0232	0.0311	0.0155	0.0174
VW	0.0383	0.054	0.0213	0.031
MEAN	1.0135	105.6126	0.7987	4.2495
BAYE	0.3565	6.6314	0.5388	2.1264
MINU	0.1656	0.8286	0.2223	0.7953
MINC	0.0552	0.0741	0.0461	0.0841
FAC1	0.0935	0.2047	0.1152	0.2398
LWID	0.1132	0.4029	0.0905	0.3144
LW1F	0.1428	0.4034	0.1455	0.4893
BSV3	0.4683	0.9066	0.5384	0.5564

Nota: Tomado de DeMiguel et. al. (2009)

Tabla 5 Varianza de los portafolios

Estrategia	10Ind	48Ind	6FF	25FF
Enfoque A				

Estrategia	10Ind	48Ind	6FF	25FF
NC1V	0.00134	0.00126	0.00156	0.00135
NC1R	0.00138	0.00135	0.00159	0.00143
NC2V	0.00134	0.00137	0.00156	0.0013
NC2R	0.00139	0.00176	0.00163	0.00152
NCFV	0.00135	0.00131	0.00162	0.00134
NCFR	0.00144	0.00166	0.00171	0.0017
PARV	0.00138	0.00141	0.00159	0.00133
PARR	0.00153	0.00163	0.00161	0.00146
Enfoque B				
1/N	0.00179	0.00221	0.0023	0.00239
VM	0.00158	0.0019	0.00191	0.0086
MEAN	0.0109	0.38107	0.00353	0.00942
BAYE	0.00264	0.06793	0.00221	0.004
MINU	0.00138	0.00186	0.00156	0.00143
MINC	0.00134	0.00133	0.00186	0.00176
FAC1	0.00145	0.00159	0.00202	0.00241
LWID	0.00131	0.00143	0.00155	0.00126
LW1F	0.00135	0.00140	0.00158	0.00134
BSV3	0.00601	0.00392	0.00306	0.00344

Nota: Tomado de DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009)

Con el fin de conocer el desempeño financiero de los portafolios de mínima varianza, se compararon bajo el enfoque de la metodología rolling horizon los ratios de sharpe, los índices de turnover y la varianzas de las distintas carteras seleccionadas con los métodos de estimación de la matriz de covarianza estudiadas en este trabajo, con los ratios de sharpe, los índices de turnover y las varianzas del estudio de referencia. En el capítulo 4, se presenta el benchmarking de los resultados.

2.2.1 Rolling horizon o ventana móvil

La metodología que se usó para la comparación de las medidas de desempeño financiero de los portafolios (ratio de sharpe, índice de turnover y varianza), se basó en el procedimiento de “*rolling horizon*”, el cual consistió en la aplicación de dos momentos

llamados in-sample y out-sample. El primer momento se basó en la elección de una ventana móvil m invariable con un tamaño de 120 observaciones que para los datos mensuales de los portafolios correspondió a 10 años, sobre ésta se realizó las estimaciones de la matriz de covarianza para la selección de portafolios de mínima varianza. Posteriormente, en el segundo momento out-sample, se usaron los datos de retorno de la ventana de móvil para calcular diversas carteras, se repitió el proceso anterior, con la diferencia la ventana de estimación rodó hacia delante un periodo al incluir los datos del mes siguiente y al eliminar los datos del primer mes (DeMiguel, et al., 2009, Puerta & Laniado 2010). Este procedimiento se repitió 398 veces en cada portafolio, de esta forma se generaron pronósticos de la variable objetivo (matriz de covarianza) en el periodo $t + 1$.

El procesamiento de los datos se realizó en el software MatlabR_2018, donde ejecutaron simulaciones basadas en la metodología *rolling horizon*, que en concreto, consiste en un horizonte continuo que:

Por medio de un esquema recursivo se generan pronósticos de las variables objetivo en el período $m + 1$. Para implementar esta técnica, inicialmente se divide la muestra total de N observaciones en porciones in sample y out of sample, donde las observaciones in sample abarcan los primeros datos de la muestra y las out of sample serán las $N-m$ observaciones restantes (Puerta & Laniado, 2010).

De acuerdo con Ilhuicatzí-Roldán, R., & Cruz-Suárez, H. (2013) el procedimiento de rolling horizon es el método más común empleado en la práctica para generar soluciones a problemas de control óptimo no homogéneos cuando el horizonte es infinito. El procedimiento corrige un horizonte N , resuelve el problema del período N correspondiente, implementa la primera decisión óptima encontrada, avanza un período y se repite desde el nuevo estado actual. A continuación, se presenta el algoritmo de este procedimiento:

- Establecer $m=0$ y $N=n$
- Encontrar la política $\pi^* = (\pi_m^*, \pi_{m+1}^*, \dots, \pi_{n-1}^*)$ que es óptimo para los periodos m a n , y establecer $\widehat{\pi}_m = \pi_m^*$
- Dejar $m=m+1$ y $n=n+1$

- Regresar al paso 2

La política $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_0, \hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \dots)$ se llama política de rolling horizon. Una vez que el total de observaciones de las variables de cada uno de los portafolios de inversión tomaron parte del procedimiento del rolling horizon, se procedió a calcular el ratio de sharpe de los portafolios y el turnover de estabilidad de los pesos asignados a cada uno de los portafolios. En las siguientes dos subsecciones se explica brevemente el procedimiento del cálculo de estos indicadores.

2.2.2 Ratio de sharpe

El ratio de sharpe fue propuesto en el año 1964 por William Sharpe y fue denominado originalmente “*reward-to-variability ratio*” y se popularizó como índice, medida o ratio de Sharpe. Proviene de un modelo simplificador del modelo de selección de portafolio de Markowitz, al reducir el número de datos requeridos para su uso, haciendo que su cálculo sea ágil (Contreras O., Stein R, Vecino C. 2015), adicionalmente, hace alusión a la media muestral de los excesos de los retornos.

Los inversionistas valoran los activos riesgosos de modo que la prima por riesgo sea acorde con el riesgo de ese exceso de retorno esperado; por lo tanto, es interesante medir el riesgo mediante la desviación estándar del exceso de retorno. La recompensa (premio por riesgo) y riesgo (medido mediante la desviación estándar) reflejan el atractivo de un portafolio de inversión mediante el ratio de su premio por riesgo a su desviación estándar de su exceso de retorno (Contreras O., Stein R., Vecino C., 2015, p 386).

Con base en lo anterior el ratio de sharpe habitualmente se encuentra definido por la Ecuación 26.

$$Sh = \frac{R_p - r_f}{\sigma_{(R_p - r_f)}} \quad (26)$$

Donde,

SR se refiere al ratio de Sharpe; R_p equivale a la rentabilidad del portafolio; r_f indica la rentabilidad libre de riesgo, y σ es igual a la desviación estándar de la rentabilidad en exceso del portafolio. El cálculo del ratio de sharpe en esta tesis no supone la presencia

de un activo libre de riesgo por lo tanto, la rentabilidad de los portafolios estudiados por unidad de riesgo en un ambiente rolling horizon se determinó mediante la Ecuación 27.

$$Sh = \frac{R_i}{\sigma_{R_i}} \quad \text{para } i=1,2,3,4. \quad (27)$$

Donde i indica el método de estimación de la matriz de covarianza utilizado para la selección de portafolios de mínima varianza, es decir, cuando $i=1$ se indica el portafolio de mínima varianza con la estimación de la matriz de covarianza S_r^* , cuando $i=2$ se refiere al portafolio de mínima varianza con la estimación de la matriz de covarianza \hat{S}_r , en el caso de que $i=3$ se indica el portafolio de mínima varianza con la estimación de la matriz de covarianza S_{MCD} y cuando $i=4$ indica que se seleccionó el portafolio de mínima varianza con la estimación de la matriz de covarianza \widehat{S}_{χ^2} .

Los autores Contreras O., Stein R., Vecino C. (2015) indican que el índice de sharpe posee algunas desventajas, como son: asimila la desviación estándar como medida de riesgo, lo que significa que tendrá un buen desempeño para datos con distribuciones simétricas, como es por ejemplo la distribución normal. La implementación del ratio de sharpe en este estudio de investigación, no presentó este inconveniente dado que su cálculo se basó en los rendimientos y riesgos de los portafolios seleccionados con la estimación robusta de la matriz de covarianza.

2.2.3 Índice de Turnover

El índice de turnover de estabilidad es un indicador que explica la dinámica constante de los pesos asignados en cada rebalanceo del portafolio, así si el valor es pequeño quiere decir que la asignación de pesos de cada activo periodo a periodo es estable (Puerta & Laniado, 2010; DeMiguel & Nogales 2009)). El cálculo de este indicador bajo el enfoque de rollíng horizon se realizó utilizando la Ecuación 28.

$$Turnover = \frac{1}{M-m-1} \sum_{t=\tau}^{M-1} \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1}^i - w_{j,t}^i|) \quad (28)$$

Donde, w_{jt}^i corresponde al peso del activo j del portafolio en el tiempo t de la estrategia i y la expresión del $w_{j,t+1}^i$ corresponde al peso de la cartera después del rebalanceo en el tiempo $t+1$ y M corresponde a la serie de los rendimientos de los portafolios y m es la ventana de estimación.

2.2.4 Varianza de los portafolios

Por último la varianza de los portafolios estudiados bajo la metodología rolling horizon se calculo a partir de la Ecuación 29 donde r_{t+1} corresponde al rendimiento del portafolio en la iteración $t+1$, W_t^i indica el peso de los activos en la iteración t el portafolio i de mínima varianza.

$$(\hat{\sigma})^2 = \frac{1}{M-m-1} \sum_{t=m}^{M-1} (W_t^{iT} r_{t+1} - \hat{\mu}^i)^2 \quad (29)$$

2.2.5 Implementación de los métodos de estimación de la matriz de covarianza

En este capítulo se presenta el procedimiento empleado para la estimación de la matriz de covarianza con el método clásico correspondiente a los estimadores de máxima verosimilitud y para la estimación de la matriz de covarianza mediante los métodos de estimación robusta. Una vez calculadas las estimaciones pertinentes se procedió a implementarlas en el algoritmo out sample, en el cual se encuentran las.

- Matriz de covarianza clásica

Hace referencia a la matriz de covarianza muestral, la cual es calculada mediante la Ecuación 29 que considera el enfoque de rolling horizon

El cálculo de la matriz de covarianza clásica en el modelo se realizó $N-m$ veces, es decir, en cada rebalanceo donde la cantidad de estimaciones dependió del tamaño de la ventana móvil.

- MCD

La implementación del método del determinante mínimo de la matriz de covarianza en el algoritmo out sample, se basó en el uso de información secundaria, para ampliar información ver Verboven, S., & Hubert, M. (2010), sin embargo, se ofrece una breve descripción de la implementación del método para la selección óptima de portafolios de inversión en el algoritmo out sample: en primer lugar se seleccionó un sub-muestra denominada x_{MCD} de tamaño h desde $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ tal que $h = \left\lceil \frac{n+p+1}{2} \right\rceil$ donde $n/2 \leq h \leq n$ y p corresponde a las cantidad de variables, posteriormente se calcularon las matrices de covarianza de cada una de las sub-muestras $\binom{n}{h}$ de tamaño h , seguidamente se calculó el determinante de cada una de las matrices obtenidas en el paso anterior y finalmente se eligió la sub-muestra con la que obtuvo el determinante más bajo en la matriz de covarianza para así calcular el estimador de la matriz de covarianza \widehat{S}_{MCD} mediante la ecuación 14 .

- Encogimiento de la matriz varianza

La estimación robusta de la matriz de covarianza por el método de encogimiento de la varianza se explico en el capítulo 1 y su cálculo se basó en la utilización de información secundaria, para ampliar información ver Ledoit & Wolf (2001). Posteriormente, se empleó la matriz de covarianza estimada por este método y se empleó como parámetro en la seleccion de portafolios de mínima varianza.

- Encogimiento de la matriz de covarianza con recorte de la media

Este método corresponde a la contribución de la presente investigación, por tal razón, en el siguiente capítulo se explica con detalle su descripción.

- Matriz de covarianza basada en la Distancia de Mahalanobis y con recorte Chi-cuadrado.

Las distancias de Mahalanobis se basan tanto en la media y varianza de las variables predictivas, como en la matriz de covarianza de todas las variables, y por lo tanto utiliza como ventaja la covarianza entre variables (Plata J., Portillo M (2008) citando a Jenness, 2008)

La distribución chi-cuadrado es una distribución continua que se especifica por los grados de libertad y el parámetro de no centralidad. La distribución es positivamente asimétrica, pero la asimetría disminuye al aumentar los grados de libertad.

Mediante este método se calculó la matriz de covarianza llamada en este trabajo como recorte Mahalanobis con chi-cuadrado \widehat{S}_{χ^2} .

El recorte de Mahalanobis con chi-cuadrado para la estimación de la matriz de covarianza, consistió en el siguiente procedimiento: en primera instancia se ordenaron las distancias de Mahalanobis de menor a mayor, posteriormente, se determinaron con un 10% de probabilidad las distancias de Mahalanobis inferiores al valor correspondiente de la distribución chi-cuadrado inversa con un 90% de probabilidad y p grados de libertad. Es de anotar que p , corresponde a la cantidad de variables del portafolio sometido en el proceso de simulación. Las distancias de Mahalanobis que cumplieron la restricción anterior, se ordenaron y posteriormente se calculó la matriz de covarianza, la cual se denotará \widehat{S}_{χ^2} en los resultados que se mostraran en el capítulo 4.

Una vez se calculó la matriz de covarianza \widehat{S}_{χ^2} se utilizó como parámetro del modelo de mínima varianza utilizado como estrategia para la selección de los portafolios de inversión.

2.3 Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad se realizó con el objetivo de valorar el efecto de las observaciones atípicas en las estimaciones robustas de la matriz de covarianza mediante la implementación de los métodos: matriz de covarianza muestral con recorte a la media S_r^* , matriz de covarianza mediante el método MCD \widehat{S}_{MCD} , matriz de covarianza con recorte chi-cuadrado en la distancia de mahalanobis \widehat{S}_{χ^2} . También mediante se analizó en efecto de los datos atípicos en la estimación de la matriz de covarianza habitual de la muestra S que se calculó por medio del método de máxima verosimilitud. El procedimiento que se realizó se describe a continuación:

En el software Matlab _R2018 se generó una base de datos con una distribución normal multivariada de números aleatorios, la cual, requirió de los parámetros de estimación Σ, μ y N , donde la media de los datos se representó con el parámetro μ , la matriz de

covarianza se representó con el símbolo Σ y N fue el número de observaciones de la base de datos. La matriz de covarianza se estimó con el uso de la distribución normal estandarizada de media cero ($\mu = 0$) y la matriz de covarianza constante correspondió a una matriz singular $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$ y el número observaciones fue $N = 1000$, en consecuencia, la base de datos utilizada tuvo una dimensión de dos variables independientes con 1000 filas, dado que la matriz de covarianza es simétrica y de dimensión 2x2 se deduce que la base de datos con la que se trabajó contiene dos variables dependientes.

Posteriormente, se determinó un valor de $K = 500$, el cual correspondió a la cantidad de datos de la base de datos estudiados en el análisis de sensibilidad. La contaminación de la base de datos que se consideró, tiene una dimensión $K \times p$ y se encuentra determinada por la Ecuación 29 donde p indica la cantidad de variables de la base de datos.

$$\text{Contaminación datos} = cK + B \text{ randn}(D, 2) \quad (29)$$

Donde, D corresponde a la cantidad de datos contaminados que se adicionó a la base de datos, es decir, si D tiene el valor de 10 la base de datos queda con $n=1010$ datos. La variable B representó la desviación típica de los datos, c fue un escalar. Las variables de la ecuación anterior, fueron consideradas como parámetros de estudio del análisis de sensibilidad de las matrices de covarianza clásica y robusta frente a diferentes modificaciones en los datos contaminados, por tal razón en el apartado 0 se presentan los resultados del análisis de sensibilidad basado en la variación de estos parámetros. Hay que mencionar que en la estimación de la matriz de covarianza robusta de la muestra denotada como S_r^* se estudió el efecto del recorte de los datos a un percentil α , por lo tanto, α también fue considerado como un parámetro de variación en el análisis de sensibilidad.

3. Método propuesto: encogimiento de la matriz de covarianza con recorte de la media

En este capítulo se muestra el desarrollo de un nuevo método para la estimación robusta de la matriz de covarianza para la selección de portafolios de inversión. Es de anotar que el modelo propuesto de estimación robusta permite calcular dos matrices de covarianza denotadas por S_r^* y \hat{S}_r , las cuales se basan en la aplicación conjunta de la teoría robusta de la media recortada y de la teoría del encogimiento o “shrinkage” de la varianza propuesto por Ledoit O. & Wolf M. (2003). A continuación, se presenta el modelo estadístico, y la descripción para la estimación de S_r^* y \hat{S}_r en el método propuesto.

Sea $X_{N \times p}$, un matriz de p rendimientos de las acciones que conforman un portafolio de inversión compuesto por N variables aleatorias, que representan la cantidad N de activos.

Se asume los siguientes supuestos iniciales:

- El rendimiento de los N activos son independientes e idénticamente distribuidos en el tiempo.
- El portafolio de inversión es seleccionado mediante la estrategia de optimización de mínima varianza.
- El portafolio de inversión permite ventas en corto de los p activos.

La selección de portafolios de inversión mediante la estrategia de mínima varianza, requiere, como se ha mencionado anteriormente, que la matriz de covarianza estimada sea invertible. Los inversionistas por su parte, requieren que sus portafolios sean estables, lo que implica que el gestor de sus carteras busque estrategias estadísticas para reducir el error de estimación. Por otra parte, el proceso de selección de portafolios de inversión se encuentra bajo un escenario de carteras conformadas por una gran

cantidad de activos, haciendo que la matriz de covarianza sea de gran tamaño, dado que existe un gran número de retorno de acciones. Cuando la dimensión de la matriz es grande en comparación con el tamaño de la muestra, lo que ocurre con frecuencia, es que funcione mal la matriz de covarianza de la muestra y exista mal acondicionamiento de la misma. El estimador shrinkage propuesto por Ledoit O. & Wolf M. (2003) esta bien condicionado, permite el cálculo de la inversa de la matriz de covarianza y es aplicable para matrices de gran dimensión.

Se sabe de la sección 1.2.4 que cualquier estimador de contracción tiene tres componentes: un estimador sin estructura \hat{S} , un estimador con mucha estructura denotado por F y una constante de contracción λ . El método estadístico de encogimiento de la matriz de covarianza sugiere imponer alguna estructura en un problema de estimación de gran tamaño. El objetivo central del método es reducir la matriz de covarianza de la muestra \hat{S} , no sesgada pero muy variable, hacia la matriz de covarianza estructura F obtener así un estimador más eficiente. Con base en lo anterior, en la Figura 1, se muestra la metodología empleada para estimar la matriz de covarianza robusta, propuesta en esta tesis de investigación.

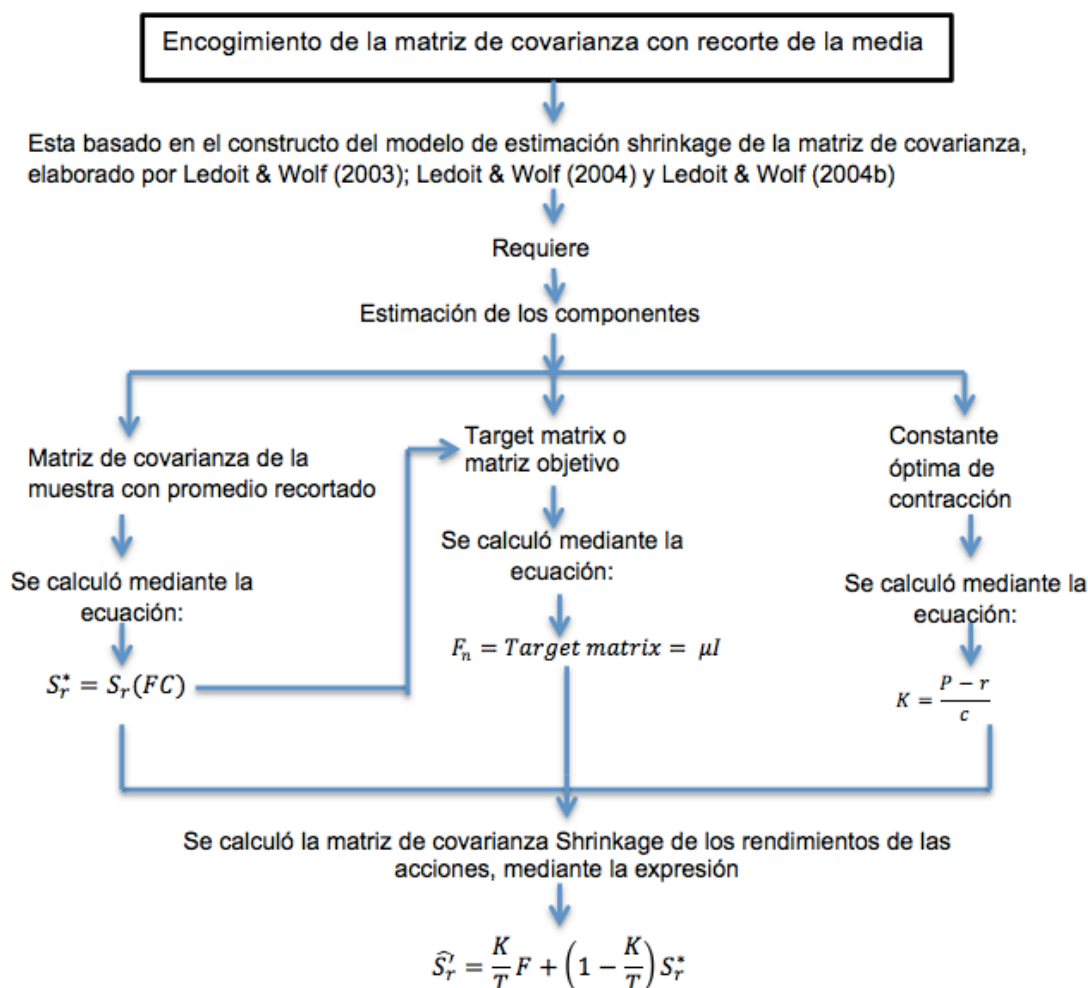


Figura 1 Metodología empleada para la implementación del método propuesto

A continuación se presentan los cálculos correspondientes para el estimador no estructurado y el estimador estructurado de la matriz de covarianza, así como para la constante de contracción.

3.1 Estimación de la matriz de covarianza muestral con media recortada

La matriz de covarianza muestral se considera en el modelo como un estimador no estructurado ya que no se impone ninguna estructura pues representa la información de los datos. Usualmente, este parámetro se estima con el uso del método de máxima verosimilitud (ver Ecuación 3), el cual, supone que las variables aleatorias presentan una

distribución normal, cuando este requisito se cumple la matriz de covarianza no presenta gran variabilidad y es un estimador no sesgado. Adicionalmente, el cálculo de la matriz de covarianza por este método permite calcular su inversa cuando $N \geq p$. Sin embargo cuando no se cumple la suposición la estimación presenta gran variabilidad.

Con el fin de estimar una matriz de covarianza muestral que sea robusta y aplicable a portafolios de gran tamaño, donde es posible el caso en que $N \leq p$, se propone una estimación basada en la teoría de la media recortada que permite excluir datos atípicos de los rendimientos de las acciones. Con la media recortada se obtiene una estimación más representativa del centro del cuerpo de los datos. Si todos los datos provienen de la misma distribución de probabilidad, entonces la media recortada es menos eficiente que el promedio de la muestra. Para ello se sabe de la sección 1.2.10 que la Ecuación 25 permite calcular la media recortada de los rendimientos de las acciones y adicionalmente que mediante la Ecuación 3 es posible calcular la matriz de covarianza, en consecuencia, reemplazando la Ecuación 25 en la ecuación 3, se tiene que la matriz de covarianza de la muestra con recorte de la media se encuentra definida por la Ecuación 30:

$$S_r = Cov(x, y) = \frac{\sum_{j=t-2(g)}^{t-g} (x_j - \bar{x}_\alpha)(y_j - \bar{y}_\alpha)}{N-2(g)} \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (30)$$

Con $g = \alpha t$ y $\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha$ también son recortes a un percentil α .

Donde α : indica el percentil de recorte de los datos, N : es el número de observaciones ordenadas de manera ascendente, g : es el número de observaciones que deben ser eliminadas, es decir, la proporción de datos que se deben eliminar en cada extremo de la distribución.

Es de anotar que la media recortada excluye los valores de los rendimientos de las acciones g mas altos y mas bajos, donde g se encuentra definida mediante la Ecuación 31:

$$g = [N\alpha] \quad (31)$$

Posteriormente, la ecuación 32 representa el factor de corrección (FC) que se aplicó a la matriz de covarianza S_r .

$$FC = \overrightarrow{1_{txt}} + D \left(\frac{\alpha}{100} \overrightarrow{1_{tx1}} \right) \quad (32)$$

Donde D convierte en una matriz diagonal el factor de corrección aplicado a la matriz S_r .

En consecuencia S_r^* es la estimación de la matriz de covarianza muestral con recorte a la media, la cual tiene implicado un factor de corrección (ver Ecuación 33)

$$S_r^* = (FC)(S_r) \quad (33)$$

3.2 Estimación del objetivo óptimo de contracción de la matriz de covarianza (Target matrix)

La estimación de la matriz de covarianza objetivo de contracción sigue el constructo del estimador desarrollado en Ledoit & Wolf (2004), el cual, busca estar bien condicionada, es decir, con poco sesgo y el error de estimación no aumenta cuando se determina la inversa de la matriz de covarianza, adicionalmente, una forma de obtener un estimador estructurado bien condicionado es imponer la condición de que todas las varianzas sean las mismas y todas las covarianzas sean cero. Es de anotar que este estimador esta libre de distribución y es la combinación asintóticamente lineal convexa de la matriz de covarianza muestral con la matriz identidad.

Con base en lo anterior, la matriz objetivo se calculó con base en el siguiente planteamiento: F_n se define como $F_n = \langle S_r^*, I_n \rangle$ entonces $E[F_n] = \mu_n$, en consecuencia de lo anterior $F_n = Target\ matrix = \mu I$. Donde μ en el método desarrollado en esta tesis, corresponde al promedio del conjunto de datos de la diagonal principal de la matriz de covarianza de la muestra S_r^* e I_n es la matriz identidad de orden n para todo $n=1, \dots, N$.

3.3 Estimación de la constante óptima de contracción

La estimación de la constante óptima de contracción requiere del uso de un estimador consistente, es decir, que se aproxime al verdadero valor de la constante de contracción a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Con base en Ledoit & Wolf (2003) este estimador se calculó mediante la Ecuación 34.

$$\lambda^* = \frac{P-r}{c} \quad (34)$$

Donde P , r y c son parámetros consistentes. El parámetro P estima consistentemente a Π , el cual, denota la suma de las varianzas asintóticas de las entradas de matriz de covarianza robusta de la muestra S_r^* . El parámetro r es el estimador consistente de ρ , el cual, indica la suma de las varianzas asintóticas de las entradas de la matriz estructurada u objetivo F_n (target matrix) con las entradas de la matriz de covarianza robusta de la muestra S_r^* . Por último el parámetro c es el estimador consistente de Γ , que denota la mala especificación o el error de estimación del modelo utilizado en la matriz objetivo.

Una vez fueron calculadas las matrices S_r^* y F la constante de optima de contracción λ^* , se precedió a determinar la matriz shrinkage de covarianza de los rendimientos de las acciones, a través de la Ecuación 35.

$$\hat{S}_r' = \frac{K}{T}F + \left(1 - \frac{K}{T}\right)S_r^* \quad (35)$$

4. Resultados

En este apartado, se ilustra el desarrollo de los métodos propuestos de estimación robusta de la matriz de covarianza que fueron abordados en la sección anterior, para la selección óptima de portafolios de inversión de mínima varianza.

Los resultados de la realización del ejercicio de aplicación de los métodos de estimación de la matriz de covarianza, se presentan en dos subsecciones, la primera de ellas es la subsección 4.1, donde se realiza un análisis del desempeño financiero de los portafolios enumerados en la Tabla 2, que consiste en la comparación de los ratios de sharpe, el índice de turnover y la varianza de los portafolios con los resultados de estas métricas que obtuvieron DeMiguel et. Al (2009) en 14 estrategias de selección de portafolios.

En la subsección 4.2 se muestran los resultados del análisis de sensibilidad descrito en la subsección 2.2.

4.1 Análisis del desempeño financiero de los portafolios de inversión

En esta subsección se presenta la comparación entre cuatro conjunto de datos el rendimiento de los portafolios descritos en la Tabla 2 respecto a las 14 estrategias existentes en la literatura, mediante la utilización de tres indicadores financieros, que son: el ratio de sharpe, el índice de turnover y la varianza de los portafolios.

4.1.1 Análisis del ratio de Sharpe de los portafolios

Como se indicó en el capítulo 3, el método propuesto de encogimiento de matriz de covarianza con recorte a la media de los rendimientos de los portafolios, suministra dos estimaciones de la matriz de covarianza S_r^* y \hat{S}_r' , donde, S_r^* es la estimación de la matriz

de covarianza de la muestra con recorte a la media y \widehat{S}_r' esta basada en la estimación anterior y proporciona el encogimiento de la matriz de covarianza con recorte de la media. Por otra parte también se señaló, que la estimación de la matriz de covarianza mediante el método MCD es representada por \widehat{S}_{MCD} y la estimación de la matriz de covarianza con recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis es denotada por \widehat{S}_{χ^2} .

El ejercicio de selección de los portafolios que se presenta, se encuentran enmarcado bajo el modelo de mínima varianza sin restricción de ventas en corto, y se realizó con la metodología “rolling horizon” descrita en la subsección 2.1 donde la ventana móvil m tiene un tamaño de 120 sobre la base de datos de los rendimientos de las acciones que conforman cada uno de los portafolios de inversión.

Para la selección de portafolios de mínima varianza con el método propuesto de encogimiento de matriz de covarianza con recorte a la media, es necesario realizar previamente la selección del percentil de recorte α óptimo, el cual permite obtener el mayor valor del ratio de sharpe en cada uno de los portafolios estudiados en esta sección.

En consecuencia con lo anterior, se realizó el ejercicio de evaluar el valor que toma este indicador de los portafolios en cada percentil de recorte α , donde $\alpha=1\%, 2\%, 3\%, \dots, 50\%$, por ejemplo, si $\alpha=20\%$ indica que el recorte de los datos en cada extremo corresponde al 10%, con los estimadores S_r^* y \widehat{S}_r' , con el fin de determinar el mayor valor de sharpe alcanzado.

En la Figura 2, se aprecian los valores de sharpe que cada portafolio obtuvo con un recorte a la media q aplicado a los estimadores S_r^* y \widehat{S}_r' . En consecuencia los valores del ratio de sharpe denotado por H1 corresponden a los portafolios de mínima varianza seleccionados con el estimador S_r^* y son representados con la línea color rojo, por otra parte, los valores de ratio de sharpe H2 están relacionados con los portafolios de mínima varianza seleccionados con la estimación de la matriz de covarianza \widehat{S}_r' , el cual esta indicado por la línea punteada de color azul. De la Figura 2 se puede decir que los valores ratio de Sharpe H1 de los portafolios 6FF, 10Ind, 25FF y 48Ind estimados con S_r^* son mayores que los valores del ratio de Sharpe H2, sin embargo ambos muestran un comportamiento tendencial similar y a medida que aumenta el percentil de recorte a la

media de los rendimientos de las acciones, los valores de los ratios de sharpe H1 y H2 tienden a disminuir.

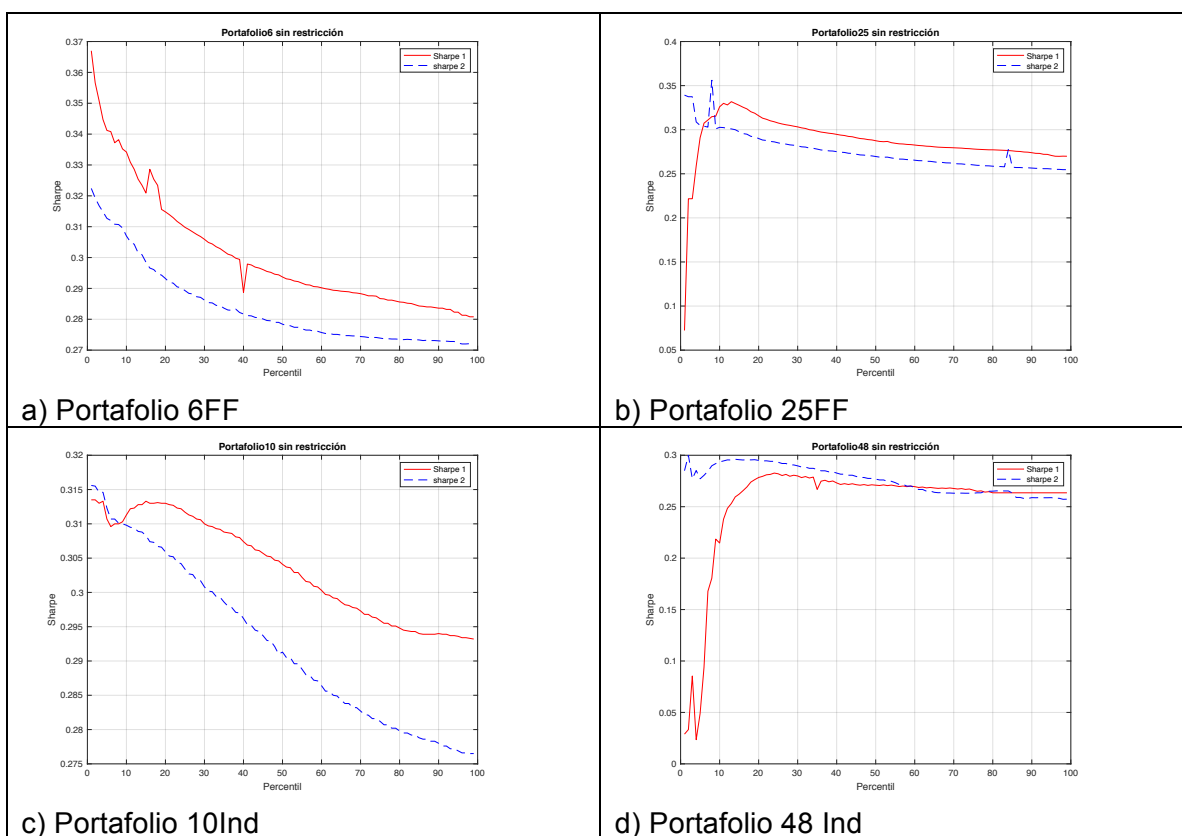


Figura 2 Comportamiento del ratio de sharpe de los portafolios de inversión según percentil de recorte

Es de anotar que las estimaciones de los indicadores H1 y H2 que fueron seleccionados de cada portafolio, corresponden al mayor valor que cada uno pudo obtener en el percentil q de recorte a la media de los rendimientos de los activos de cada portafolio. En la Tabla 6 se muestran los mayores valores del ratio de sharpe que los portafolios obtuvieron con el método de encogimiento de la matriz de covarianza con recorte a la media de los rendimientos de los portafolios, así como también el α^* asociado.

Tabla 6 Mayor valor de sharpe (H1 y H2) y el α^* según la dimensión del portafolio

		10Ind	48Ind	6FF	25FF
H1	Mayor valor de sharpe	0.3156	0.2827	0.367	0.3318
	α^*	1	24	1	13
H2	Mayor valor de sharpe	0.3156	0.3	0.3224	0.332
	α^*	1	2	1	1

Una vez, se determinó los percentiles de recorte a la media óptimos así como las estimaciones H1 y H2 de los portafolios mediante el método de encogimiento de matriz de covarianza con recorte a la media, se procedió a calcular los valores del ratio de sharpe asociado a los otros métodos estudiados en esta tesis, los cuales son: estimación robusta de la matriz de covarianza mediante el MCD y el recorte chi-cuadrado de la distancia de Mahalanobis.

Los resultados de los valores del ratio de sharpe de cada uno de los portafolios mínima varianza que fueron seleccionados mediante la implementación de los métodos estudiados en esta investigación, se presentan en la Tabla 7 en la Sección-A. En la Sección-B se observan los resultados de los ratios de sharpe que los autores DeMiguel et al (2009) obtuvieron en el estudio que es considerado referencia en esta tesis.

Tabla 7 Ratios de sharpe de los portafolios

Estrategia	10Ind	48Ind	6FF	25FF
<i>Sección-A: Estrategias desarrolladas en esta tesis</i>				
Mahalanobis con recorte chi-cuadrado	0.2678	0.1838	0.383	0.3564
MCD	0.2723	0.2114	0.3924	0.3954
H1	0.3135	0.2827	0.3667	0.3318
H2	0.3156	0.3	0.3224	0.3564
<i>Sección-B: Estrategias que existen en la literatura</i>				
Panel A: estrategias desarrolladas en el estudio de DeMiguel et.al. (2009)				
NC1V	0.2854	0.2886	0.3385	0.3649

Estrategia	10Ind	48Ind	6FF	25FF
NC1R	0.289	0.2831	0.3374	0.3553
NC2V	0.2919	0.2855	0.3527	0.4089
NC2R	0.3193	0.2891	0.3922	0.4278
NCFV	0.2927	0.2808	0.3479	0.3728
NCFR	0.3114	0.2723	0.3186	0.3815
PARV	0.2841	0.2823	0.3478	0.4077
PARR	0.3293	0.3166	0.3912	0.4403

Panel B: estrategias de la literatura que trabajaron DeMiguel et.al. (2009)

1/N	0.2541	0.2508	0.2563	0.2565
VM	0.2619	0.2698	0.2437	0.2558
MEAN	0.0499	-0.0334	0.3214	0.2253
MINU	0.2865	0.2222	0.364	0.4199
MINC	0.2852	0.2914	0.2629	0.272
LWID	0.2962	0.262	0.3226	0.3974

Nota: Los valores del ratio de sharpe de la sección B fueron tomados de DeMiguel et. Al. (2009)

Se observa que en términos del ratio de sharpe los métodos estudiados en esta tesis, que la estimación de la matriz de covarianza para la selección de portafolios superan notablemente el panel B de la sección-B, en especial los valores de H1 y H2 de los portafolios 10Ind, 48Ind, 6FF y 25FF asociados al método de encogimiento de la matriz de covarianza con recorte a la media de los rendimientos.

Se destaca además, que los resultados del panel A de la sección-B del portafolio 6FF son superadas por las estrategias Mahalanobis con recorte chi-cuadrado, MCD y H1 en al menos el 75%. Por último, en términos del ratio de sharpe, se hace notorio, que el promedio global de las estrategias H1 y H2 en los portafolios estudiados, suministró mejores valores de los ratios de sharpe que aquellos plasmados en la sección-B, indicando que los portafolios de mínima varianza estimados con el método propuesto de encogimiento de la matriz de covarianza con recorte a la media, proporcionan mejores rendimientos en relación al riesgo asumido por el inversionista.

4.1.2 Análisis del índice de Turnover de los portafolios

El cálculo del índice de Turnover, sigue el planteamiento matemático de la Ecuación 28, en concordancia, en la Tabla 8 en la Sección-A se muestran los índices de turnover asociados a cada una de las estrategias propuestas en esta tesis según la dimensión del portafolio de inversión, y en la Sección-B se presentan los índices de Turnover obtenidos en el estudio de referencia.

Tabla 8 Índices de turnover de los portafolios según dimensión del portafolio

Estrategia	10Ind	48Ind	6FF	25FF
<i>Sección A: Estrategias desarrolladas en esta tesis</i>				
Mahalanobis con recorte chi-cuadrado	0.1971	1.1324	0.2321	1.0062
MCD	0.3173	4.4171	0.3623	2.7783
H1	0.1347	0.3355	0.1351	0.2333
H2	0.0881	0.3804	0.0607	0.1593
<i>Sección B: Estrategias existentes en la literatura</i>				
Panel A: estrategias desarrolladas en paper de DeMiguel et.at. (2009)				
NC1V	0.1494	0.268	0.1729	0.2407
NC1R	0.6013	0.8232	1.0064	0.9767
NC2V	0.1448	0.3266	0.1946	0.457
NC2R	1.0177	2.7556	1.6594	3.6275
NCFV	0.1052	0.2469	0.279	0.4134
NCFR	0.6944	2.3117	1.9952	3.356
PARV	0.1689	0.3838	0.26	0.4628
PARR	1.0414	2.4846	1.6407	3.5657
Panel B: estrategias de la literatura que trabajaron DeMiguel et.at. (2009)				
1/N	0.0232	0.0311	0.0155	0.0174
VM	0.0383	0.054	0.0213	0.031
MEAN	1.0135	105.6126	0.7987	4.2495
MINU	0.1656	0.8286	0.2223	0.7953
MINC	0.0552	0.0741	0.0461	0.0841
LWID	0.1132	0.4029	0.0905	0.3144

Nota: Los valores los índices de turnover de la sección B fueron tomados de DeMiguel et. Al. (2009)

La comparación en terminos del índice del turnover entre los resultados que se obtuvieron con las estrategias propuestas en esta investigación (Sección-A) y las estrategias desarrolladas en la literatura (Sección-B), se destaca que el método propuesto de encogimiento de la matriz de covarianza con recorte a la media de los rendimientos de los portafolios de inversión estudiados en esta tesis, proporciona valores mas bajos del índice de turnover respecto a los valores presentados en el estudio de referencia, lo que indica que con el empleo de la estrategia principal propuesta en esta tesis es posible brindarle al inversionista mayor credibilidad, debido a que existe mayor estabilidad en la asignacion de los pesos en cada activo periodo a periodo del rebalanceo del portafolio.

Con base en la Tabla 8, se puede decir que la estrategia H2 que superó en un 50% las estrategias planteadas en en panel B y en un 100% las estrategias planteadas en el panel A de la sección B, por su parte los portafolios seleccionados con base en la estrategia de estimación H1 se obtuvo un mejor desempeño en terminos del índice de turnover en el panel A, donde, las estimaciones en los portafolios 10Ind, 48Ind, 6FF, 25FF superaron el 80.50%, 62.50%, 100% y 100% respectivamente los valores de las estrategias estudiadas en el estudio de referencia. Respecto al panel B de la sección A la estrategia H1 supero en un 50% los índices de turnover correspondientes a los portafolios 48Ind y 25Ind, por otra parte, el índice de turnover del portafolio de mínima varianza calculado con el método de estimacion MCD supero también en un 50% el índice de turnover de las estrategias del estudio de referencia de los portafolios de 6FF y 25FF, mientras que los portafolios 10Ind y 6FF seleccionados mediante la estrategia de la distancia de Mahalanobis con recorte chi-cuadrado superaron en un 50% y 75% los valores del índice de turnover del estudio de referencia del panel A de la sección B.

4.1.3 Análisis de la varianza de los portafolios

La varianza de los portafolios 10Ind, 48Ind, 6FF y 25FF seleccionados bajo el modelo de mínima varianza y con la estimación de la matriz de covarianza mediante la aplicación de las estrategias propuestas en el Capítulo 3, se determinó mediante la Ecuación 29. Los

resultados que se obtuvieron se presentan en la Tabla 9, donde en la sección-A se presenta la varianza de los portafolios seleccionados con las estrategias de estimación de la matriz de covarianza propuestas en esta investigación y en la Sección-B se muestran los resultados que obtuvieron los autores DeMiguel et.al. (2009) en el estudio que es considerado referencia en este estudio.

Tabla 9 Varianza de los portafolios según la dimensión del portafolio

Estrategia	10Ind	48Ind	6FF	25FF
<i>Sección A: Estrategias desarrolladas en esta tesis</i>				
Mahalanobis con recorte chi-cuadrado	0.0012	0.0013	0.0001	0.0002
MCD	0.0012	0.0013	0.0002	0.0002
H1	0.0011	0.0009	0.0001	0.0002
H2	0.0012	0.0009	0.0002	0.0002
<i>Sección B: Estrategias que existen en la literatura</i>				
Panel A: estrategias propuestas en el paper de DeMiguel et.al. (2009)				
NC1V	0.00134	0.00126	0.00156	0.00135
NC1R	0.00138	0.00135	0.00159	0.00143
NC2V	0.00134	0.00137	0.00156	0.0013
NC2R	0.00139	0.00176	0.00163	0.00152
NCFV	0.00135	0.00131	0.00162	0.00134
NCFR	0.00144	0.00166	0.00171	0.0017
PARV	0.00138	0.00141	0.00159	0.00133
PARR	0.00153	0.00163	0.00161	0.00146
Panel B: estrategias de la literatura que trabajaron DeMiguel et.al. (2009)				
1/N	0.00179	0.00221	0.0023	0.00239
VM	0.00158	0.0019	0.00191	0.0086
MEAN	0.0109	0.38107	0.00353	0.00942
MINU	0.00138	0.00186	0.00156	0.00143
MINC	0.00134	0.00133	0.00186	0.00176
LWID	0.00131	0.00143	0.00155	0.00126

Nota: Los valores los índices de turnover de la sección B fueron tomados de DeMiguel et. al. (2009)

De la comparación de los resultados de la varianza de los portafolios estudiados entre las estrategias de la Sección-A y las estrategias comprendidas en la Sección-B, se resalta que los inversionistas y por ende los gestores de las carteras de inversión buscan una varianza pequeña en sus portafolios ya que esto implica menor riesgo, con base en estos términos, de la Tabla 9, se puede decir que los portafolios obtenidos con los métodos propuestos en esta tesis (sección-A) de mínima varianza los y conformados por 10 acciones superaron las varianzas de los portafolios pertenecientes al panel A de la sección B el 100%, 100%, 12.5%, 100% respectivamente, y respecto a las varianzas del panel B de la sección B, los portafolios de la sección-A obtuvieron varianzas superiores en un 100%, 50%, 100%, 100% respectivamente.

Así mismo, los portafolios de inversión con dimensión de 48 acciones, obtenidos con las estrategias planteadas en la sección-A obtuvieron un mejor desempeño en términos de la varianza que aquel desempeño obtenido en los portafolios de la sección-B, dado que su desempeño en promedio fue superior en el panel-A en un 87.5%, 87.5%, 100%, 100% respectivamente y en el panel-B en un 100% con todos los métodos propuestos. Por otra parte las carteras obtenidas con los métodos propuestos en la sección-A con una dimensión 6 acciones obtuvieron resultados destacables respecto a los resultados plasmados en la sección B, ya que obtuvieron un menor valor en la varianza del portafolio, se destaca que con el uso de las estrategias recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis, H1, H2 los portafolios superaron en promedio el 100% las varianzas del panel A y del panel B de los portafolios de la sección-B, mientras que con el empleo de la estrategia MCD, las estrategias estudiadas en esta tesis superaron en promedio del panel A el 12.5% y del panel el 100%.

Por otro lado, los portafolios de 25 acciones generados con las estrategias de la sección A superaron en un 100% las estrategias del panel A y del panel B de la sección B con la implementación de la estrategia recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis, mientras que con la implementación de la estrategia MCD superaron del panel A el 12.5% y del panel B obtuvieron menor varianza en un 100%, además, con las estrategias H1 y H2 se obtuvo que tuvieron en promedio un mejor desempeño del 64.29% y del 14.29% respectivamente.

Con base en los resultados, presentados anteriormente se observó que en terminos del ratio de sharpe el método propuesto de encogimiento de la matriz de covarianza con

recorte a la media presenta un mayor desempeño, es decir, mayor rendimiento en relación al riesgo, que las estrategias de estimación de la matriz de covarianza MCD y recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis para la selección de portafolios, además también presenta un desempeño superior que las estrategias estudiadas en el estudio de referencia. Por otra parte, se destaca que el método propuesto proporcionó mayor credibilidad en la selección de portafolios, ya que se obtuvieron índices de turnover mas bajos en las distintas dimensiones de las carteras estudiadas en esta tesis de investigación, lo que supone, costos menores las transacciones relacionadas con la compra y venta de acciones que surge en cada rebalanceo de los portafolios.

4.2 Análisis de sensibilidad

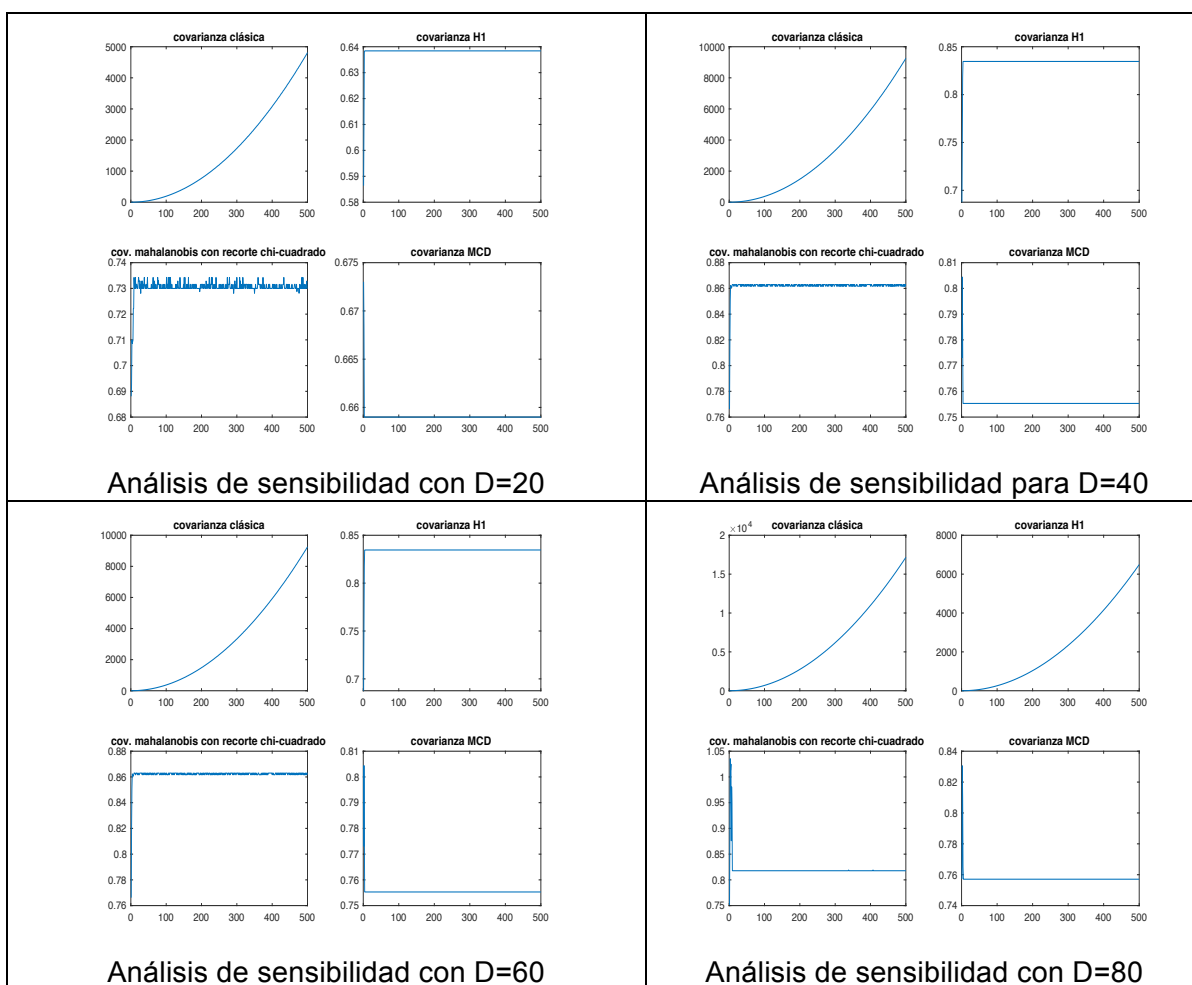
Esta subsección presenta el efecto que ocasionan la presencia de datos atípicos en los resultados de la matriz de covarianza robusta y de la matriz de covarianza no robusta. Donde la estimación de matriz de covarianza robusta para este estudio de sensibilidad se refiere a la estimación de S_r^* referido en la sección 3.1, por otro lado la estimación de la matriz de covarianza no robusta se refiere a \hat{S} descrita en el Capítulo 1.

Conviene subrayar que el modelo de contaminación que se sigue esta sección, obedece a la Ecuación 29 la cual fue descrita en la sección 2.3. En consecuencia los parámetros relacionados con, D : cantidad de datos contaminados que se adiciona a la base de datos. B : desviación típica de los datos y c : escalar son estudiados en el análisis de sensibilidad. Como se mencionó en el apartado 2.3 el percentil de recorte de los datos q también se considera un parámetro de estudio.

A continuación se presentan los resultados del análisis de sensibilidad que se obtuvieron ante la variación de los parámetros de estudio, anteriormente mencionados. Mediante el uso de figuras se aprecia la sensibilidad de la matriz de covarianza robusta ante la presencia de datos atípicos, la cual es reflejada con el color azul, por su parte el color rojo en las figuras representa la sensibilidad de la matriz de covarianza clásica ante la presencia de datos atípicos

4.2.1 Variación del parámetro D: cantidad de datos contaminados

En el presente apartado se presentan los resultados de sensibilidad de la matriz de covarianza robusta de la muestra con recorte a la media, de la matriz de covarianza robusta estimada por medio del método MCD, de la matriz de covarianza estimada por medio del recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis y de la matriz de covarianza clásica, frente a cantidad de adición de datos contaminados, se resalta que se contaminaron como máximo el 20% de los datos, valor que correspondió a una cantidad de adición máxima de 100 datos de una base de datos compuesta de 500 observaciones. De la Figura 4 se puede decir que los métodos robustos propuestos en esta tesis proporcionan valores mas estables que la matriz de covarianza clásica, ante la contaminación de datos por medio de la adición de datos outliers.



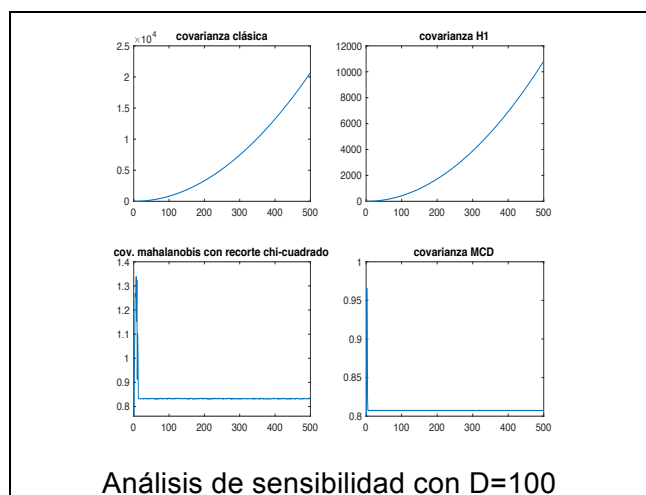


Figura 3 Análisis de sensibilidad para diferentes valores del parámetro D

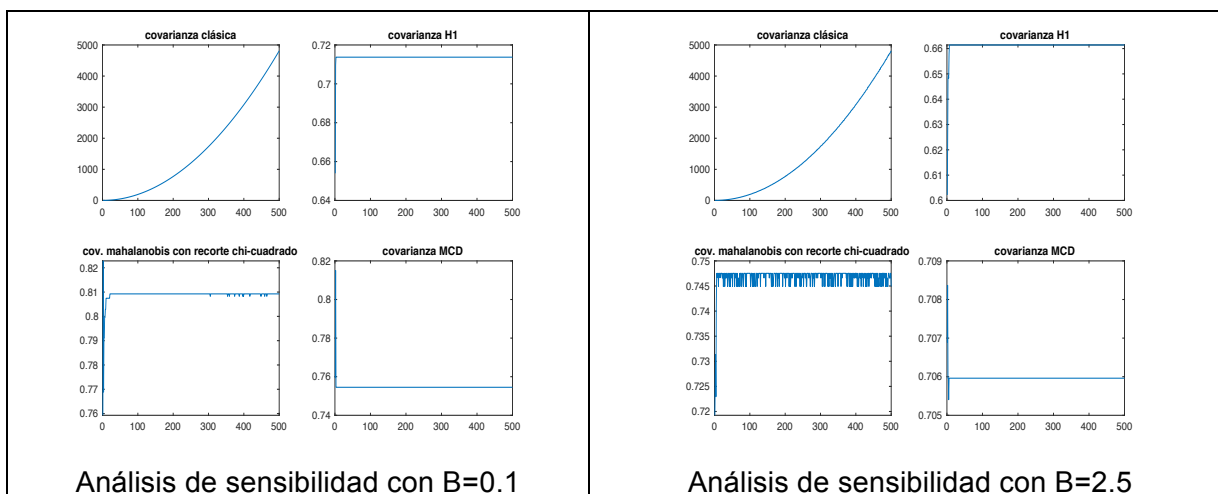
En la Figura 4 se aprecia el análisis de sensibilidad de las diferentes matrices de covarianza estimadas, donde la matriz de covarianza de la muestra robusta con un recorte de la media presenta un recorte de los datos de 10%, ante la presencia de diferentes tamaños de datos atípicos. Se observó que la estimación de la matriz de covarianza de la muestra mediante el método clásico es muy sensible a medida que aumentan la cantidad de datos contaminados, caso contrario se observó con la matriz de covarianza robusta estimada por el método MCD y la estimada por medio del recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis, se resalta que la matriz de covarianza robusta propuesta en esta tesis presentó mayoría robustez en los resultados y en consecuencia estabilidad en los mismos. Es preciso anotar que, en el análisis de sensibilidad relacionado con $D=80$, el cual corresponde a la contaminación del 16% de los datos, la estimación de la matriz de covarianza robusta presentó sensibilidad. Sin embargo, se observó una diferencia significativa respecto a la sensibilidad que obtiene la estimación clásica de la matriz de covarianza muestral.

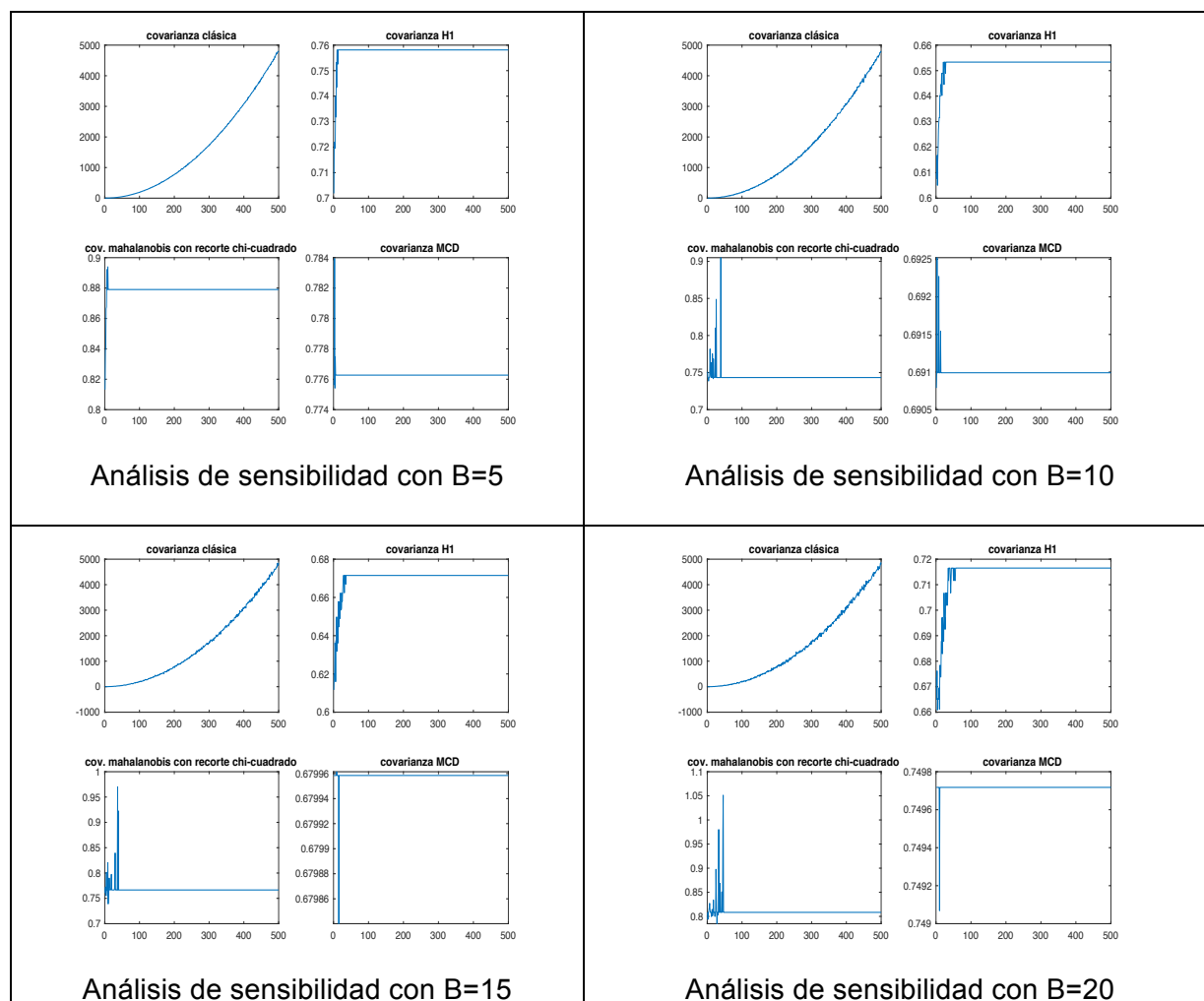
Sobre la base del análisis anterior, y después de realizar diferentes simulaciones en Matlab, de la sensibilidad de las matrices de covarianzas estudiadas en esta subsección frente al percentil de recorte de los datos para la estimación de S_r^* y el tamaño del parámetro D , se observó que S_r^* no es tan sensible al percentil de recorte q . Para ejemplificar este hecho en el percentil 10, se evaluaron diferentes tamaños de datos contaminado y se encontró que para $D < 54$ es decir con una contaminación del 10,4% de los datos la estimación de S_r^* permanece invariante. Otro ejemplo que permite mostrar, lo

enunciado anteriormente, se observó en el percentil 30 de recorte a la media, donde se observó que los resultados S_r^* son sesibles cuando se adiciona un 35% de datos contaminado, este hecho en la práctica es poco común.

4.2.2 Variación del parámetro B: desviación típica

La variable B, representa la desviación típica, asociada a la contaminación de los datos insertada en la base de datos, este parámetro es una medida de dispersión respecto al promedio de los datos. En esta subsección se presenta la sensibilidad de la estimación matriz de covarianza robusta de la muestra con recorte a la media, de la matriz de covarianza robusta estimada por medio del método MCD, de la matriz de covarianza estimada por medio del recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis y de la matriz de covarianza clásica, frente a cambios de la desviación estándar. En la Figura 5 se observa que la matriz de covarianza muestral estimada por el método clásico, es más sensible ante la desviación estándar de la contaminación de los datos, mientras que la sensibilidad de los datos de las matrices estimadas S_r^* , \hat{S}_{MCD} y \hat{S}_{χ^2} , es menor. Lo anterior indica que los métodos robustos para la estimación de la matriz de covarianza en la selección de portafolios generan mayor estabilidad ante la presencia de outliers en la asignación de pesos en cada rebalanceo de los portafolios de inversión.





4.2.3 Variación del parámetro α : percentil de recorte

En esta subsección se presenta la sensibilidad de la matriz de covarianza robusta muestral con recorte a la media de los datos y de la estimación clásica de la matriz de covarianza muestral frente a diferentes porcentajes de recorte q a la media de los datos. Es preciso subrayar, que los valores de los parámetros, $D=20$ y $B=1$ permanecieron constantes en el análisis de sensibilidad, representando la adición de datos contaminados del 4% con una desviación estándar de 1. Se obtuvo resultados S_r^* , presento sensibilidad ante el percentil de recorte de la media de los datos, dado que a medida que el recorte disminuye los valores de la entrada $[1,2]$ de la matriz S_r^* se incrementan notoriamente, sin embargo alcanza estabilidad cuando $\alpha=4\%$, lo que

proporciona estabilidad de los datos frente a la presencia de datos atípicos y recorta los outliers de la base de datos con un bajo percentil. Las estimaciones de las matrices de covarianzas \hat{S}_{MCD} y \hat{S}_{χ^2} y de la covarianza clásica no presentan sensibilidad ante el percentil de recorte, dado que sus estimaciones no dependen de estos parámetros, la variabilidad que se observó se debe a que los datos son números aleatorios multivariantes con distribución normal.

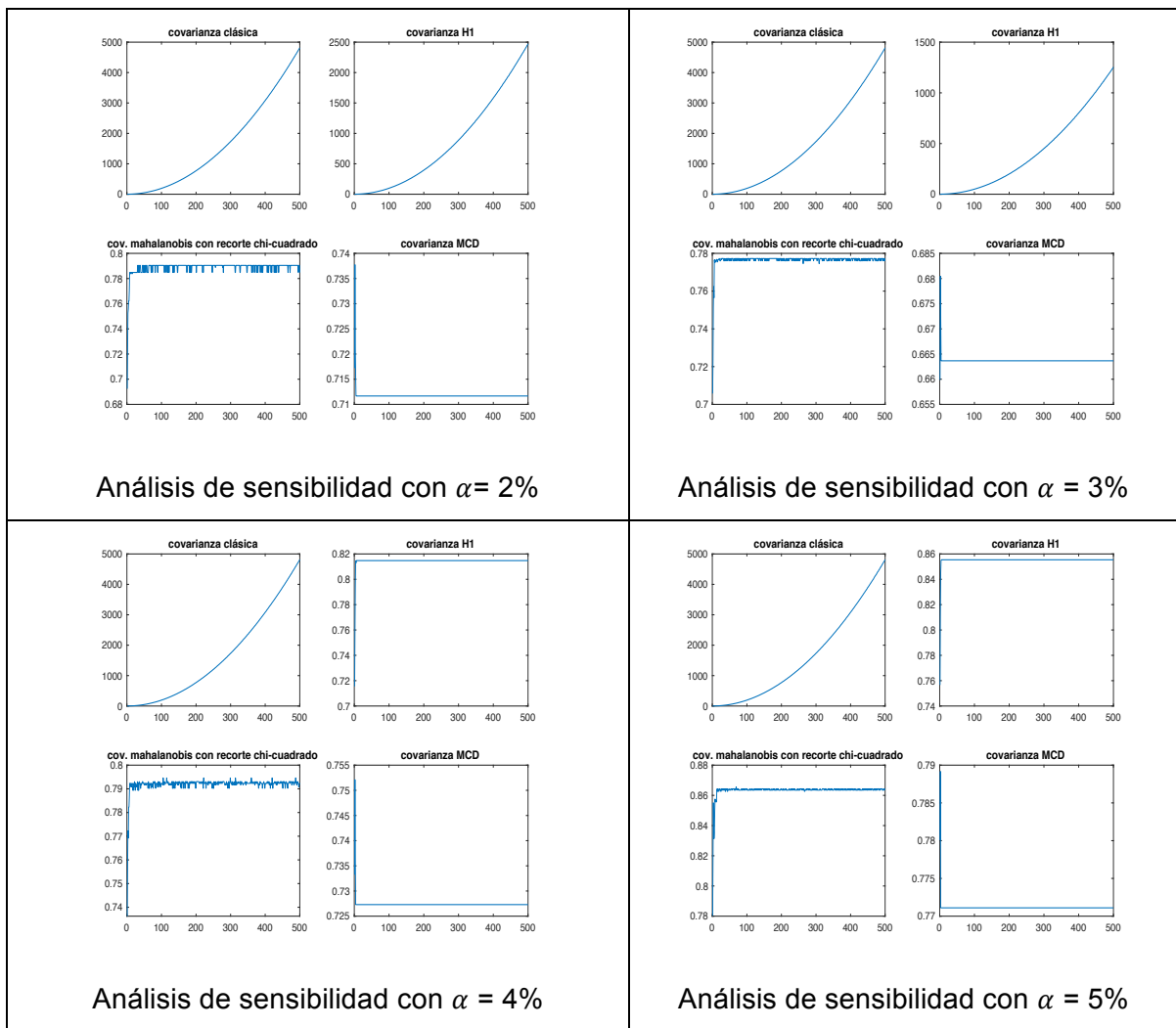


Figura 5 Análisis de sensibilidad para diferentes valores de α

4.2.4 Variación del parámetro C: constante

La constante C, afecta escalarmente el conjunto de datos estudiados de la base de datos para el desarrollo del análisis de sensibilidad de K (cantidad de datos de la base de datos puestos en el estudio del análisis de sensibilidad), es por ello que cuando los demás parámetros permanecieron constantes ($B=1$, $\alpha=10$, $D=20$) y varió solamente el parámetro C, se obtuvo que los valores de la entrada [1,2] de las estimaciones de las matrices de covarianzas S_r^* , \hat{S}_{MCD} no son sensibles a los cambios del parámetro C del modelo de contaminación de los datos, indicando de esta forma la estabilidad de los métodos ante la presencia de datos atípicos, sin embargo la matriz de covarianza \hat{S}_{χ^2} fue sensible ante el aumento del parámetro C a medida que aumenta el valor del escalar (Ver Figura 7).

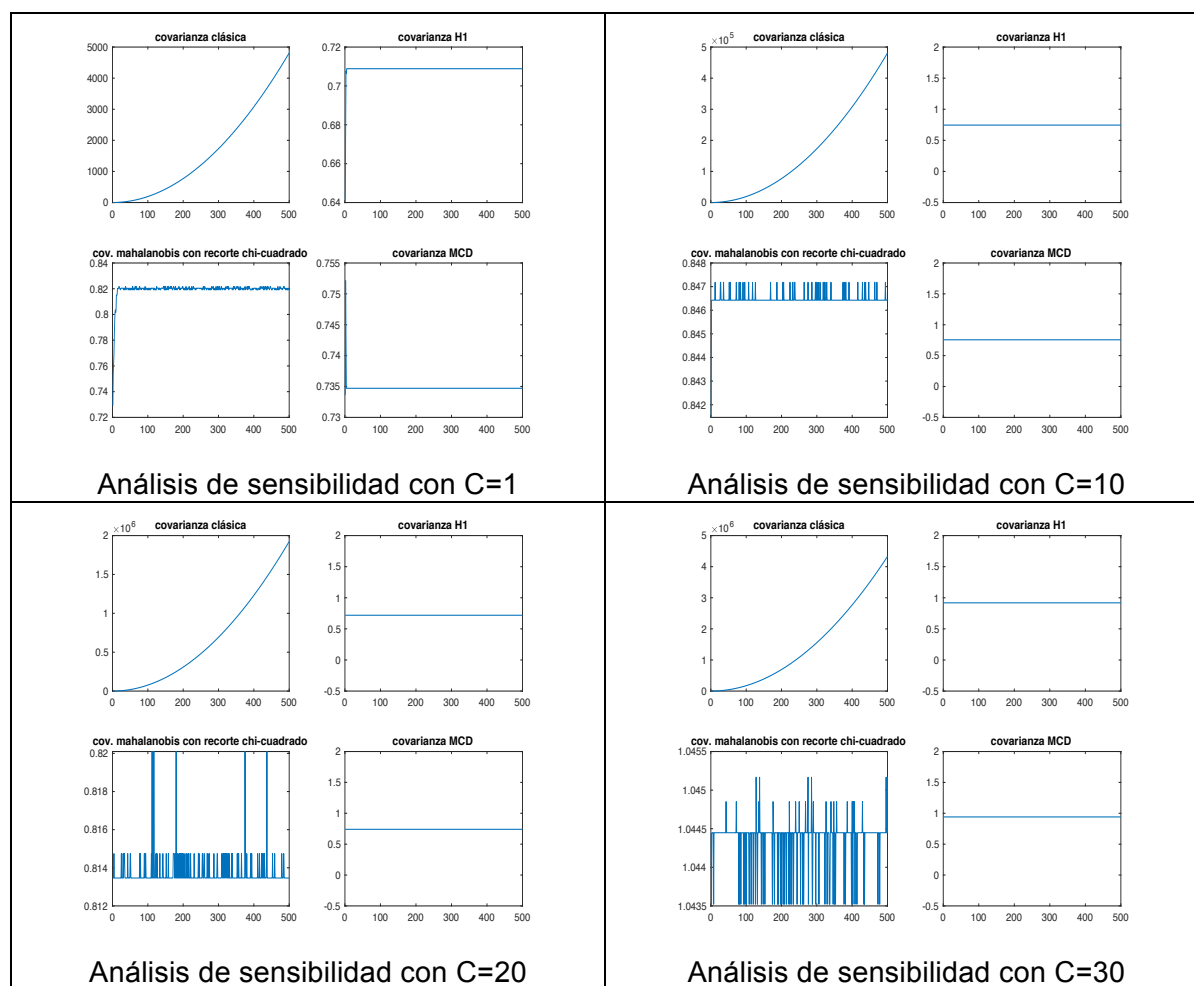


Figura 6 Análisis de sensibilidad para diferentes valores de C

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

A continuación, se enuncian las conclusiones mas relevantes del desarrollo de este trabajo de investigación, el cual, presenta la propuesta de un modelo de estimación titulado: *Encogimiento de la matriz de covarianza con recorte de la media*, que permite estimar dos matrices de covarianza robustas de los rendimientos de las acciones que conforman un portafolio de inversión, la primera permite estimar la matriz de covarianza robusta de la muestra y la segunda se relaciona con la estimación de la matriz de covarianza a partir del encogimiento de la misma. Es importante resaltar que los objetivos trazados en la propuesta de investigación para este trabajo se cumplieron todos y cada uno a cabalidad, así mismo se indica que los resultados generan un aporte al conocimiento, como se observa en los capítulos 3 y 4. A continuación se muestran un conjunto de conclusiones que son importantes resaltar:

- El método propuesto de estimación robusta de la matriz de covarianza con media recortada y encogimiento de la misma, presenta eficiencia computacional, además, el método introducido es sencillo y presentó un desempeño financiero competitivo en términos del rendimiento por unidad del riesgo, se obtuvieron resultados deseables en relación al riesgo medido con la desviación estándar y en estabilidad se obtuvieron resultados competitivos dado que reduce los costos de transacción. Así mismo, presenta solidez en los resultados ante la presencia de datos contaminados haciendo que los pesos asignados de las acciones en la cartera tengan mayor estabilidad.
- En términos del índice de turnover y de la varianza de los portafolios 10Ind, 48Ind, 6FF y 10FF, se destaca que los valores obtenidos de los portafolios de mínima varianza por medio del estimador propuesto para la matriz de covarianza, proporcionan mayor credibilidad en la selección de portafolios, ya que se obtuvieron índices de turnover mas bajos en las distintas dimensiones de las

carteras estudiadas en esta tesis de investigación, obteniendo de esta forma menores costos de transacción en el proceso de venta y compra de acciones asociados en cada rebalanceo del portafolio. Respecto a la varianza de los portafolios obtenidos con el método de estimación propuesto, y con los métodos estudiados: recorte chi-cuadrado en la distancia de Mahalanobis y MCD se obtuvo notoriamente varianzas bajas, lo que proporciona al inversionista un nivel de riesgo bajo en la inversión.

5.2 Recomendaciones

Con el objetivo de fortalecer la investigación realizada en esta tesis se propone los siguientes aspectos futuros de investigación:

- Adaptación de la técnica robusta a otros tipos de aplicaciones estadísticas que consideran la matriz de covarianza, como son algunas versiones robustas de: componentes principales, k-medias, distancia de mahalanobis, clasificación supervisada y no supervisada.
- Implementación de la técnica robusta de matriz de covarianza modelos de regresión lineal.
- Indagar la propiedades de la estimación robusta de la matriz de covarianza con distintos métodos recortes en la matriz de covarianza.

Bibliografía

- Black, F. and Litterman, R. (1992) Global Portfolio Optimization. *Financiar Analistas Jornal*, 48, 28-43.
<http://dx.doi.org/10.2469/faj.v48.n5.28>
- Bodie Z., Kane A. & Marcus A. (2004). *Principios de inversiones*. McGraw-Hill/Interamericana de España. ISBN:84-481-4075-3
- Bueno D. (1976). Puntualizaciones sobre el concepto de Leverage. *Revista española de financiación y contabilidad*. 5(7). 55-74.
- Box, G. (1953). Non-Normality and Tests on Variances. *Biometrika*, 40(3/4), 318-335.
doi:10.2307/2333350
- Cano J.A., Carazo C. & Salmerón D. (2017). Objective Bayesian model selection approach to the two way analysis of variance. *Computational Statistics*. 33(4). 236-248. DOI: 10.1007/s00180-017-0727-1
- Contreras O., Stein R., Vecino C. (2015). Estrategia de inversión optimizando la relación rentabilidad-riesgo: evidencia en el mercado accionario colombiano. *Estudios Gerenciales*. 31(137). 383-392. <http://doi.org/10.1016/j.estger.2015.07.005>.
- DeMiguel, V., & Nogales, F. J. (2007). Portfolio Selection with Robust Estimation. *Operations Research*, 57(3), 560–577. <http://doi.org/10.1287/opre.1080.0566>
- DeMiguel, V., Garlappi, L. & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953. <http://doi.org/10.1093/rfs/hhm075>
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F., & Uppal, R. (2009b). A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science*, 55(5), 798-812. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/40539189>

- Devore J. (2005). Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. Thomson. ISBN 9706864571
- Di palma, M., & Gallo, M. (2016). A co-median approach to detect compositional outliers. *Journal of Applied Statistics*, 43, 1–15. DOI: 10.1080/02664763.2016.1163525
- Fabozzi, F. J., Cfa, Kolm, P. N., Pachamanova, D., & Focardi, S. M. (2007). Robust Portfolio Optimization and Management. <http://doi.org/10.3905/jpm.2007.684751>
- Fabozzi, F. J., Huang, D., & Zhou, G. (2010). Robust portfolios: contributions from operations research and finance. *Annals Of Operations Research*, 176(1), 191-220. doi:10.1007/s10479-009-0515-6
- Falk M.(1997). On Mad and Comedians. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 49(4). 615-644. <https://doi.org/10.1023/A:1003258024248>
- Fan J, Fan Y, Lv J (2008). High dimensional covariance matrix estimation using a factor model. *Journal of Econometrics*.147 (1). 186-197. ISSN: 0304-4076. Doi: 10.1016/J.JECONOM.2008.09.017
- Franco C., Avendaño C ., & Barbutín H. (2011). Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión. *Tecno Lógicas*, (26), 71-88. Retrieved March 15, 2018, from http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-77992011000100005&lng=en&tlng=es.
- Giraldo Cárdenas, L., Díaz Zapata, J. M., Arboleda Ríos, S. M., Galarcio Padilla, C. L., Lotero Botero, J. E., & Isaza Cuervo, F. (2015). Modelo de selección de portafolio óptimo de acciones mediante el análisis de Black-Litterman. *Revista Ingenierías Universidad De Medellin*, 14(27), 111-130
- Godino F. (2014). Estimación de matrices de covarianzas: Nuevas perspectivas (Trabajo fin de Master). UNED.
- Hualpa P. (2012). Componentes principales mediante el método robusto MCD: Matriz de covarianzas de determinante mínimo (tesis de pregrado). Universidad Nacional Mayor de San Marcos
- Hubert, M., Rousseeuw, P. J., & Branden, K. Vanden. (2005). ROBPCA: A New Approach

- to Robust Principal Component Analysis. *Technometrics*, 47(1), 64–79.
<http://doi.org/10.1198/004017004000000563>
- Huber, P. (2014). Robust Statistics. *International Encyclopedia of Statistical Science*, 2nd ed. [online] Miodrag Lovric, pp.25-32. Available at: https://doi-org.ezproxy.unal.edu.co/10.1007/978-3-642-04898-2_594
- Ikeda Y, & Kubokawa T. (2016). Linear shrinkage estimation of large covariance matrices using factor models. *Journal of Multivariate Analysis*. 152. 61-81 ISSN 0047-259X. doi: /10.1016/j.jmva.2016.08.001.
- Ilhuicatzí-Roldán, R., & Cruz-Suárez, H. (2013). Rolling horizon procedures for the solution of an optimal replacement problem of n-machines with random horizon. *Investigación Operacional*, 34(2), 105-116.
- Lauprete, J. G., Samarov, M. A., & Welsch, E. R. (2002). Robust portfolio optimization. *Metrika*, 55(1), 139–149. <http://doi.org/10.1007/s001840200193>
- Ledoit, O. and M. Wolf (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *J. Empir. Finance* 10, 603-621.
- Ledoit, O., and M. Wolf. 2004. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix: Problems in Mean-Variance Optimization. *Journal of Portfolio Management* 30:110–19. DOI: 10.3905/jpm.2004.110
- Ledoit, O. and M. Wolf (2004b). A well conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *J. Multiv. Anal.* 88, 365-411.
- Leys C., Klein O. y Dominicy Y. (2018). Detecting multivariate outliers: Use a robust variant of the Mahalanobis distance. *Journal of Experimental Social Psychology*. 74. 150:156. doi.org/10.1016/j.jesp.2017.09.011.
- Martínez H., Medrano B. E., Fernández L. y Tejada Y. (2013). Análisis multivariado de datos como soporte a la decisión en la selección de estudiantes en proyectos de software. *Ingeniería Industrial*, 34(2), 130-142. Recuperado en 29 de marzo de 2018, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-59362013000200003&lng=es&tlng=es.
- Markowitz, H. (1952). PORTFOLIO SELECTION*. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.

<http://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525>.

- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Yale University Press. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bh4c8h>
- Medina, L. A. (2003). Aplicación de la teoría del portafolio en el mercado accionario colombiano. *Cuadernos de Economía*, 22(39), 129-168. Retrieved April 01, 2018, from http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-47722003000200007&lng=en&tlng=es.
- Montaño N., Zurita G. (2009). Estimadores robustos para el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas de vectores aleatorios multivariados. *Revista tecnologica ESPOL*. 22(1). 1-9. Disponible en: <http://www.dspace.espol.edu.ec/xmlui/handle/123456789/60>
- Muñoz, J., & García, M. (2013). Técnicas para detección de outliers multivariantes. *Revista En Telecomunicaciones e Informática*, 3(5), 11–25.
- Scutell, M. G., & Recchia, R. (2013). Robust portfolio asset allocation and risk measures. *Annals of Operations Research*, 204(1), 145–169. <http://doi.org/10.1007/s10479-012-1266-3>
- Sajesh, A., & Srinivasan, R. (2012). Outlier detection for high dimensional data using the Comedian approach. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82(5), 745–757. <https://doi.org/10.1080/00949655.2011.552504>
- Peña D. (2002). *Análisis de datos multivariantes*. Madrid. Mac Graw Hill.
- Plata J., Portillo M (2008). Mahalanobis y las aplicaciones de su distancia estadística. *CULCyT: Cultura Científica y Tecnológica*. 27(5). 13-20
- Puerta, A., & Laniado, H. (2010). Diseño de estrategias óptimas para la selección de portafolios, un análisis de la ponderación inversa al riesgo (PIR). *Lecturas de Economía*. (73), 243-273.
- Restrepo L, Posada S, Noguera R.(2012) Aplicación del análisis por componentes principales en la evaluación de tres variedades de pasto. *Rev Colomb Cienc Pecu*. 25:258–266.
- Rousseeuw, P. (1985), "Multivariate Estimation with High Breakdown Point," in

- Mathematical Statistics and Applications, Volume B, eds. W. Grossmann, G. Pflug, I. Vincze, and W. Werz, The Netherlands: Dordrecht- Reidel, pp. 283–297
- Rousseeuw, P., and van Zomeren, B. (1990), “Unmasking Multivariate Outliers and Leverage Points,” *Journal of the American Statistical Association*, 85, 633–639.
- Rousseeuw, P.J. and Driessen, K.V. (1999). A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator. *Technometrics*, 41, 212-223
- Sharpe, W. (1963). A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, 9(2), 277-293. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2627407>
- Stein, C. (1956). Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. In Neyman, J., editor, *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical and Statistical Probability*, pages 197–206. University of California, Berkeley. Volume I.
- Useche A., A. J. (2015). Construcción de portafolios de inversión desde las finanzas del comportamiento: una revisión crítica. *Cuadernos de Administración*, 28 (51), 11-43. <http://dx.doi.org/10.11144/Javeriana.cao28-51.cpiif>
- Verboven, S., & Hubert, M. (2010). MATLAB library LIBRA. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 2(4), 509–515. <http://doi.org/10.1002/wics.96>